Communautés Epistémiques : Organisation du travail et Efficacité

Nicolas Curien, Gilbert Laffond,
Jean Lainé et François Moreau
Laboratoire d'Econométrie, CNAM, Paris

31 octobre 2003

Résumé

Dans le modèle présenté dans cet article, on distingue deux phases de travail au sein d'un collectif épistémique, tel qu'une communauté de développeurs de logiciel libre : d'abord une phase de conception de projet, au cours de laquelle les rendements sont croissants selon la taille communautaire en raison d'une externalité de club propre aux tâches créatives ; puis une phase d'implémentation du système épistémique, au cours de laquelle les rendements d'échelle sont au contraire décroissants, en raison d'une exigence d'intégration des contributions individuelles en un projet global cohérent. Selon les valeurs des paramètres du modèle (externalité de club, degré d'intégration du système, résistance du projet à l'implémentation, préférences des utilisateurs entre capacité et interopérabilité), une communauté efficace peut être, soit dégénérée en un singleton, soit au contaire étendue à l'ensemble de la population de référence, soit enfin admettre une taille bornée supérieure à l'unité. Toutefois, l'optimum n'est pas atteignable de manière décentralisée et ce dilemme stabilité/efficacité ne peut être complètement résolu par l'adoption d'une règle d'allocation des gains communs : l'exercice d'une autorité contrôlant les entrées s'avère nécessaire, un résultat conforme à l'observation empirique des communautés de logiciel libre.

Existence, stability and efficiency of epistemic commmunities

The model presented in this paper separates two stages of labour within an epistemic group, such as an open-source community : a first stage is devoted to project design and it generates increasing returns to scale with respect to the community size, due to a club externality specific to creative activities ; then, a second stage is devoted to implementing the epistemic system and it exhibits decreasing returns to scale, incurred when integrating individual inputs into a consistent collective output. We show that, depending on exogeneous factors (club externality, integration level of output, project resistance to implementing, users' preferences between system capacity or interoperability), an efficient community may be either degenerated and restricted to a single agent, or it may extend to the whole background population, or its size may be bounded and greater than unity. Now, the

optimum cannot be easily decentralized through individual behaviour, because of a stability/efficiency dilemma which can better be solved through an authority controlling entries in the community, rather than by adopting an allocation rule of common gains, a result consistent with empirical evidence from the open source world.

1 Introduction

Cet article s'intéresse à l'organisation efficace du travail au sein de "communautés épistémiques", telles que les communautés de développeurs de logiciel libre. Ainsi que le souligne Gensollen [2003], les communautés épistémiques, dont l'objet est la production collective de connaissances, se distinguent : d'une part, des "communautés d'expérience", dont les membres se communiquent des informations finalisées et de l'expertise ; d'autre part, des "communautés d'échange", au sein desquelles sont partagés des contenus, comme de la musique par exemple. Le fonctionnement des communautés épistémiques soulève deux questions majeures. La première porte sur l'existence même de telles communautés : pourquoi les agents acceptent-ils de coopérer pour développer des produits ne faisant le plus souvent pas l'objet d'un échange marchand in fine, et dont ils ne retireront ainsi aucun avantage pécuniaire direct ? La deuxième question a trait à l'organisation : les communautés ont-elles une taille optimale et un mode de régulation efficace, reposant par exemple sur un contrôle des entrées, des règles d'exclusion, etc. ?

Soulignons que les processus communautaires ne sont pas spécifiques à Internet : le modèle que nous présenterons dans la suite de l'article pourrait, par exemple, s'appliquer à des communautés de scientifiques cherchant à réaliser un ouvrage collectif. Il est indéniable, en revanche, qu'Internet a donné à ces processus un nouvel essor car, devenus médiatés, ils ont considérablement gagné en efficacité, comme en atteste de manière exemplaire le développement du logiciel libre : pour Lakhani et von Hippel [2000], le succès des communautés d'internautes-développeurs provient essentiellement de ce que le courrier électronique réduit drastiquement le temps nécessaire aux échanges de requêtes et de réponses.

La littérature traitant des collectifs médiatés s'est jusqu'ici essentiellement intéressée au monde du logiciel libre et s'est assez peu attachée à rendre compte de l'organisation et du fonctionnement des communautés, se focalisant plutôt sur la problématique de leur existence (voir, par exemple, Lerner et Tirole [2002], Foray et Zimmermann [2001], Peyrache et alii [2000]). Deux arguments initialement avancés pour expliquer les motivations des développeurs de logiciels libres, le besoin[1] et l'altruisme, sont aujourd'hui unanimement reconnus comme peu recevables. Deux autres arguments semblent,

[1] Pour Linus Torvalds, tout comme les artistes qui ne peuvent s'empêcher de jouer ou

en revanche, plus solides. D'une part, tout participant à une communauté de développeurs peut espérer engranger d'importants effets d'apprentissage, concourrant à l'amélioration de ses compétences personnelles (Foray et Zimmermann [2001]). Il s'agit à la fois d'un apprentissage par la pratique, à travers la participation à un effort collectif de recherche, et d'un apprentissage par interaction, à travers la confrontation à divers savoirs, méthodes ou styles de programmation. D'autre part, l'adhésion à une communauté de développeurs contribue à constituer un capital de réputation, qui pourra être indirectement valorisé par l'obtention de subventions de recherche, ou, à terme, sous la forme d'une embauche dans une entreprise informatique (Lerner et Tirole [2002])[2].

Si la question de l'architecture des communautés de développeurs libres a fait l'objet de nombreuses recherches empiriques, les contributions théoriques sont beaucoup plus parcellaires. Du point de vue empirique, la vision traditionnelle du fonctionnement totalement décentralisé d'une communauté de développeurs, à l'instar d'un "bazar" (selon l'expression de Raymond [1999]), doit être largement nuancée. En réalité, dans le monde du logiciel libre, tout projet est initié et piloté par un "noyau" de développeurs confirmés, exerçant une forte autorité hiérarchique (Auray [2003]). Certes, des améliorations du code-source et de nouvelles fonctionnalités sont pontanément proposées par chacun des développeurs, mais seul un aréopage restreint est habilité à valider ces propositions, qui sont ensuite affinées incrémentalement et de manière décentralisée, par la correction des dysfonctionnements (les *bugs*) signalés par les utilisateurs.

Dès lors, un des principaux dilemmes que doit résoudre une communauté de développeurs réside en un arbitrage entre taux d'innovation et niveau de fiabilité. Comme le soulignent Mockus et alii [2000], à partir d'une étude de la communauté Apache, une communauté de logiciel libre disposant d'un puissant noyau de développeurs, mais n'ayant jamais réussi à fédérer un grand nombre de contributeurs rapportant les dysfonctionnements, sera certes capable de créer de nouvelles fonctionnalités, mais elle échouera néanmoins, en raison du manque de ressources consacrées à déceler et réparer les *bugs*. Une tâche essentielle du noyau consiste par conséquent à contrôler le rythme de développement du projet, afin d'éviter que les progrès du développement ne soient anihilés par l'inflation des problèmes de mise au point. On retrouve les termes du dilemme classique entre stabilité et efficacité, soulevé dans la littérature économique consacrée aux coalitions (voir Dutta et Jackson [2003] ou Jackson [2003], pour une synthèse).

Dans le modèle présenté plus loin, nous regardons une communauté épis-

de créer, les développeurs ne pourraient s'empêcher de développer car ils le font pour le "fun" !

[2] Lerner et Tirole évoquent également le souci des développeurs de satisfaire leur ego par la réputation acquise au sein de la communauté.

témique comme un collectif d'individus se fixant pour objectif de développer un projet commun, comportant autant de modules que d'individus, chacun apportant une idée de module. Le développement comporte deux phases successives :

- tout d'abord une phase de conception, au cours de laquelle tous les membres de la communauté collaborent à la définition de chacun des modules et chaque responsable de module bénéficie d'une externalité positive engendrée par ses interactions avec les autres membres, la communauté constituant à ce stade un "club de créativité" ;
- ensuite, une phase d'implémentation des modules et de leur interfaces, au cours de laquelle les agents réunissent certes leurs efforts, mais l'externalité de club est épuisée et l'exigence d'intégration des modules individuels en un système cohérent engendre au contraire des rendements d'échelle décroissants, la communauté constituant à ce stade une infrastructure collective menacée de congestion et sujette à des coûts de coordination.

La valeur retirée d'un projet achevé dépend, d'une part de la capacité du système réalisé, d'autre part de sa "puissance", d'autant plus forte que les modules constituants sont nombreux et que leur degré d'inter-opérabilité est élevé. Si le souci de créer davantage de valeur amène naturellement à renforcer capacité et puissance, celui de maîtriser l'horizon de temps auquel la valeur est finalement recueillie exerce une force de rappel. La capacité du projet ainsi que la taille communautaire qui conduisent à un optimum d'efficacité dépendent de plusieurs facteurs exogènes : l'arbitrage des utilisateurs entre capacité et puissance d'un système, la résistance du projet à l'implémentation, l'externalité de club à l'œuvre durant la phase de conception, le degré d'intégration visé durant la phase d'implémentation.

Certaines contributions se sont interessées, comme la nôtre, à la question de l'efficacité des communautés de développeurs, vues comme des coalitions coopératives sujettes à des facteurs d'instabilité. Dans le modèle de Foray et Zimmermann [2001], qu'il participe ou non au développement d'un logiciel libre, un individu bénéficie indifféremment d'une externalité positive, due au caractère de bien collectif de ce logiciel ; dès lors, la décision individuelle d'adhésion repose sur une comparaison entre, d'un côté, des gains potentiels de réputation et d'apprentissage et, d'un autre côté, des coûts liés à l'effort de participation, augmentés d'une externalité négative, induite par la frustration de voir le système se développer à l'extérieur de la communauté, sans retour pécuniaire vers les "pionniers". La frustration est la plus forte chez les individus n'ayant que peu à gagner en terme de réputation et apprentissage, c'est-à-dire les plus compétents ; ce sont donc eux les premiers à faire défaut, risquant ainsi d'empêcher le développement du logiciel. Foray et Zimmermann suggèrent que les défections déstabilisant une communauté de logiciel libre seraient enrayées si une rémunération était offerte aux dé-

veloppeurs, du moins aux plus confirmés d'entre eux : par exemple, sous la forme d'une embauche dans une entreprise les autorisant à consacrer une partie de leur temps de travail au développement de logiciels libres.

Notre modèle, quant à lui, rend compte d'un facteur d'instabilité jouant en sens inverse du risque de défection : il met en évidence, non pas un déficit d'entrée dans une communauté, mais au contraire un excès d'entrée, dû à la non-internalisation des coûts collectifs de congestion dans les décisions individuelles de participation. Nous montrons que cette instabilité ne peut être aisément résolue par la voie d'une rémunération car, même dans le cas où un projet épistémique peut donner lieu à une valorisation marchande, aucune règle d'allocation du gain global entre les participants ne permet de stabiliser la communauté efficace.

Le corps de l'article est organisé en trois sections. La section 2 est consacrée à l'analyse du travail communautaire, composé des deux phases enchaînées de conception et d'implémentation. Dans la section 3, nous définissons un critère d'efficacité, permettant de déterminer la configuration communautaire optimale : une communauté efficace peut, selon les cas, soit s'étendre à toute la population de référence, soit admettre une taille bornée supérieure à l'unité, soit dégénérer en un singleton. Enfin, dans la section conclusive 4, nous discutons le dilemme stabilité/efficacité qui rend inopérante une décentralisation de l'optimum communautaire à travers un équilibre avec libre entrée : la résolution du dilemme réclame en conséquence un contrôle autoritaire des entrées dans une communauté.

2 Organisation du travail épistémique

2.1 Capacité et puissance

On considère une communauté homogène, constituée de N individus semblables, développant chacun un module au sein d'un projet collectif, par exemple un logiciel au sein d'un package de logiciels libres, ou encore un chapitre d'ouvrage collectif. Chaque module individuel est de capacité K, c'est-à-dire constitué de K "briques" élémentaires : nombre de lignes de code d'un logiciel ou nombre de sections d'un chapitre d'ouvrage, par exemple. La capacité globale du système réalisé dans le cadre du projet communautaire est ainsi KN.

Les N modules peuvent être rendus plus ou moins interopérables, ce que traduit le nombre des arcs qui sont effectivement activés, dans le graphe d'interconnexion définissant l'architecture du système en projet. A un extrême, si ce système se résume à la juxtaposition de N modules indépendants entre eux, alors le graphe d'interconnexion comporte seulement N liens, chaque module constituant étant simplement relié à un noyau central, par exemple un même logiciel d'exploitation (cas du package de logiciels), ou une même

table des matières et un même index (cas de l'ouvrage collectif). Si, à l'autre extrême, le système est totalement interconnecté, alors le graphe est complet et il comporte $N^2 = N + N(N-1)$ liens, chaque module étant, d'une part relié au noyau central (N liens), et d'autre part mis en compatibilité avec chacun des autres modules ($N(N-1)$ interfaces).

Entre les deux extrêmes précédents, l'interconnexion du système est partielle. Par interpolation, nous admettrons que le nombre des arcs du graphe d'interconnexion varie alors en N^{1+i}, où le paramètre i ($0 \leq i \leq 1$) s'interpréte comme un "degré d'intégration", caractéristique intrinsèque d'un système, indépendante de son dimensionnement. Du fait de l'intégration, même partielle, un système représente davantage que la somme de ses modules et le nombre N^{1+i} de liens d'interconnexion est une mesure de la "puissance" d'un projet communautaire : cette puissance est strictement supérieure au nombre N des modules dès que le degré d'intégration est strictement positif ($i > 0$). Quant au ratio rapportant la puissance d'un système à son dimensionnement, soit $N^{1+i}/N = N^i$, il traduit "l'ouverture modulaire", en terme de nombre de connexions externes reliant un module donné aux autres modules.

2.2 Conception et implémentation

Le processus de développement des modules et de leurs interfaces se déroule en deux phases successives : une phase "A" de conception, au cours de laquelle les agents définissent collectivement les modules individuels et l'architecture du système, suivie d'une phase "B" d'implémentation, au cours de laquelle la construction des modules et leur intégration sont effectivement réalisées et testées.

Au cours de la phase "A", on postule la présence d'une externalité positive de club entre les agents : concevoir collectivement un système comprenant N modules de même capacité K exige que soit accompli un nombre de pas élémentaires de créativité proportionnel à la capacité modulaire K, mais moins que proportionnel à la taille communautaire N. On admettra que, en espérance, ce nombre de pas est égal à à KN^{1-e}, le paramètre e ($0 < e < 1$) traduisant l'intensité de l'externalité.

L'externalité de club provient notamment de ce que les tâches de créativité épistémique sont par nature multi-dimensionnelles : chacun des individus de la communauté étant spécialisé sur certaines dimensions au moins, il est en mesure d'indiquer des "raccourcis" permettant d'alléger l'ampleur du travail collectif, selon une forme de division de travail chère à Adam Smith. Pour expliquer le succès des communautés de développeurs de logiciels libres, Lakhani et von Hippel [2000] ont, quant à eux, avancé la notion de "solution sur l'étagère" : les problèmes de créativité que certains rencontrent pour développer leur propre module sont souvent des problèmes sur lesquels les

autres individus de la communauté ont déjà réfléchi et pour lesquels ils ont, d'ores et déjà, si ce n'est la solution, au moins une piste de solution.

Une fois la phase "A" de conception achevée, débute la phase "B" d'implémentation. Au cours de cette phase, en sus de la construction et de la mise au point interne de chacun des modules constituant le projet communautaire, il faut assurer la mise en cohérence de ces derniers, avec le degré d'intégration i. On supposera que, en espérance, le nombre de problèmes élémentaires d'implémentation devant être résolus est proportionnel à KN^{1+i}, c'est-à-dire à la fois proportionnel à la capacité K de chaque module (dimension des noeuds du graphe d'interconnexion) et au nombre N^{1+i} de liens entre modules (nombre d'arcs du graphe). Contrairement à la phase de conception, la phase d'implémentation ne donne pas lieu à une externalité positive de club entre les agents : le travail demeure certes collectif, mais la performance individuelle de chacun des agents n'est pas augmentée par le fait de la coactivité. Ainsi, l'espérance du nombre de pas d'implémentation vaut ρKN^{1+i}, où le facteur de proportionnalité $\rho > 0$ s'interprète comme un facteur de "résistance à l'implémentation", une caractéristique intrinsèque du projet, indépendante de la performance des agents.

Si les deux processus successifs de conception et d'implémentation étaient déterministes, les durées de chacune des deux phases, ainsi que la durée globale du projet, seraient immédiatement obtenues en divisant le nombre de pas élémentaires à réaliser par la vitesse épistémique collective, égale au produit λN de la vitesse individuelle λ par l'effectif communautaire N. Désignant par T_A et T_B les durées respectives des phases "A" et "B" et par par T_P la durée du projet, on aurait ainsi :

$$T_A = \frac{1}{\lambda} KN^{-e} \ , \ T_B = \frac{\rho}{\lambda} KN^{i} \ , \ T_P = T_A + T_B \ .$$

En réalité, les processus épistémiques ne sont pas déterministes, mais fondamentalement aléatoires, l'aléa provenant d'une double incertitude ex ante portant : d'une part, sur le nombre de tâches élémentaires qui devront effectivement être accomplies ex post ; d'autre part, sur le temps nécessaire pour venir à bout de chacune d'elles. Toutefois, un jeu d'hypothèses raisonnables sur la structure de ces deux sources d'incertitude conduit exactement aux mêmes expressions que celles indiquées ci-dessus, à la condition de substituer aux durées déterministes les équivalents-certains des durées aléatoires et de définir la performance épistémique individuelle λ, non pas comme une vitesse déterministe, mais comme le flux temporel de la probabilité d'aboutissement d'une tâche élémentaire (voir annexe : "Processus épistémique").

2.3 Division du temps et durée de projet

La durée certaine équivalente T_P d'un projet communautaire, soit :

$$T_P = \frac{K}{\lambda}(N^{-e} + \rho N^i) \ ,$$

est inversement proportionnelle à la performance épistémique individuelle λ et proportionnelle à la capacité modulaire K. Cette durée est par ailleurs soumise à deux influences contraires, quand s'élève la taille communautaire N à capacité modulaire K constante : d'un côté, l'externalité de créativité e tend à raccourcir la phase de conception (terme décroissant proportionnel à N^{-e}) ; d'un autre côté, l'exigence d'intégration i tend à rallonger la phase d'implémentation (terme croissant proportionnel à N^i).

A toute taille communautaire N donnée, correspond un certain ratio T_B/T_A de division du temps entre les phases "A" et "B". Ce ratio, indépendant de la capaciété modulaire K, vaut :

$$\theta(N) = \frac{T_B}{T_A} = \rho N^{e+i} \ .$$

Ainsi, lorsqu'une communauté s'étend ou se contracte, la structure temporelle $\theta(N)$ du projet qu'elle entreprend se déforme avec une élasticité d'échelle constante, soit $\eta = e + i$. Plus l'externalité de créativité e est importante, ou plus l'exigence d'intégration i est forte, plus l'élasticité d'échelle η est élevée, donc plus le ratio de division du temps est sensible à une variation de la taille communautaire.

Quelle division du temps entre implémentation et conception minimise-t-elle l'équivalent-certain de la durée du projet et quelle est la taille communautaire qui correspond à cette division minimisatrice ? Différenciant la durée globale T_P et posant $\pi = e/i$, il vient :

$$dT_P = dT_A + dT_B = -eT_A + iT_B = iT_A[\theta(N) - \pi] \ .$$

Le sens des variations de T_P (signe de dT_P) est donc lié à la position du ratio de division du temps $\theta(N)$ par rapport au ratio π, rapportant l'externalité de club e au degré d'intégration i et s'interprètant comme le "potentiel communautaire" : l'atout e, mis en regard de la contrainte i. Puisque le ratio $\theta(N) = \rho N^\eta$ croît à partir de la valeur $\theta(1) = \rho$ lorsque la taille communautaire N augmente à partir de l'unité, deux cas sont possibles :

- ou bien la résistance à l'implémentation domine le potentiel communautaire ($\rho \geq \pi$), et alors la durée du projet ne cesse de croître lorsqu'une communauté s'étend au-delà d'un singleton (car $\theta(N) \geq \theta(1) \geq \pi \Longrightarrow dT_P \geq 0 \ \forall N \geq 1$) ;
- ou bien le potentiel communautaire domine au contraire la résistance à l'implémentation ($\rho < \pi$), et alors la durée du projet, d'abord fonction

décroissante ($dT_P < 0$) de la taille communautaire N tant que $\theta(1) < \theta(N) < \pi$, puis fonction croissante de cette taille ($dT_P > 0$) lorsque $\theta(N) > \pi$, atteint un minimum lorsque le ratio de division du temps s'égalise au potentiel communautaire ($\theta(N) = \pi \Longrightarrow dT_P = 0$).

En résumé, si $\overline{N}$ et $\overline{\theta}$ désignent respectivement la taille communautaire et la division du temps qui rendent minimale la durée certaine équivalente T_P du projet (à capacité modulaire K constante), on a :

$$\overline{\theta} = \sup\left[\rho, \pi\right] \quad , \quad \overline{N} = \theta^{-1}(\overline{\theta}) = \left(\frac{\overline{\theta}}{\rho}\right)^{\frac{1}{\eta}} = \sup\left[1, \left(\frac{\pi}{\rho}\right)^{\frac{1}{\eta}}\right] .$$

Ainsi, lorsque la durée minimale n'est pas atteinte "en coin" pour $\overline{N} = 1$ et $\overline{\theta} = \rho$, alors les phases d'implémentation et de conception divisent le temps minimisé du projet dans le rapport des forces respectives de l'externalité de créativité, allégeant la conception, et de l'exigence d'intégration, chargeant l'implémentation ($\overline{\theta} = \pi \Longleftrightarrow \overline{T}_B/\overline{T}_A = e/i$). Par ailleurs, le seuil $\overline{N}$ de croissance communautaire au-delà duquel la durée du projet cesse de s'abaisser, pour au contraire dériver à la hausse, est d'autant plus élevé que :

- la résistance ρ à l'implémentation est faible, car faire grandir la communauté pénalise alors avec une moindre intensité la durée du projet ;
- le potentiel communautaire $\pi = e/i$ est élevé, car un potentiel accru repousse la limite au-delà de laquelle augmenter encore la taille communautaire fait perdre davantage en durée d'implémentation que gagner en durée de conception ;
- l'élasticité d'échelle $\eta = e + i$ est faible, car il est alors nécessaire d'étendre la communauté davantage, pour atteindre la cible efficace de division du temps, soit $\overline{\theta} = \pi$[3].

Toutefois, ainsi que nous allons maintenant le discuter, la recherche de l'efficacité ne consiste pas à minimiser la durée d'un projet communautaire, mais bien plutôt à en maximiser la valeur. Or, si elle inflige certes une pénalité de retard, la durée permet à l'inverse "d'acheter" de la capacité modulaire, et donc de la valeur finale. Nous montrerons que, en conséquence, l'optimum est réalisé en jouant conjointement sur la capacité modulaire et sur la taille communautaire de manière, non pas à réduire le plus possible la durée certaine équivalente du projet, mais à maintenir cette durée au niveau qui réalise l'arbitrage optimal entre l'effet de retardement et l'effet de création de valeur.

[3] On remarque qu'augmenter le degré d'intégration i a pour effets conjoints de diminuer le potentiel communautaire $\pi = e/i$ et d'augmenter l'élasticité d'échelle $\eta = e + i$, si bien que la taille communautaire $\overline{N}$ qui minimise la durée de projet est, fort logiquement, une fonction décroissante de i. En revanche, augmenter l'externalité de créativité e produit un effet résultant ambigu sur $\overline{N}$, poussant certes cette taille à la hausse par un renforcement du potentiel communautaire π, mais la tirant simultanément à la baisse par un accroissement de la sensibilité η de la division du temps à des variations d'échelle.

3 Optimum communautaire

3.1 Critère d'efficacité

Un projet collectif rassemblant N modules individuels engendre, à la date de son achèvement, une utilité U qui, dans le cas particulier d'une valorisation marchande, n'est autre que la valeur pécuniaire du système produit et vendu par la communauté. L'utilité (ou la valeur) U dépend, d'une part de la capacité totale KN du projet, d'autre part de sa puissance N^{1+i}, c'est-à-dire du nombre N^{1+i} de liens d'interopérabilité entre les modules constituants. Nous supposerons que ces deux facteurs, capacité et puissance, sont substituables dans les préférences des utilisateurs et que U revêt une forme de type Cobb-Douglas :

$$U = U_\alpha(KN, N^{1+i}) = (KN)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \, N^{\frac{1+i}{1+\alpha}} \qquad \alpha \geq 0 \; .$$

Le paramètre α mesure l'appétence du marché final pour la capacité, relativement à la puisssance : plus α est élevé, plus les utilisateurs sont sensibles à l'éventail des fonctionnalités séparément offertes par les différents modules (capacité) et moins ils prêtent d'attention à l'interopérabilité (puissance). Dans le cas extrême où $\alpha \to +\infty$, les utilisateurs n'accordent de valeur qu'à la capacité ; à l'autre extrême, si $\alpha = 0$, seule compte alors la puissance. Quant à la valeur particulière $\alpha = 1$, elle correspond à la situation de neutralité dans laquelle capacité et puissance sont équipondérées dans les préférences des utilisateurs.

Le choix d'une fonction d'utilité U_α à rendements globaux constants, selon la capacité KN et la puissance N^{1+i}, revient à faire l'hypothèse naturelle que la valeur d'un système totalement désintégré ($i = 0$) est strictement proportionnelle au nombre N de ses modules : seule l'exigence d'un degré d'intégration strictement positif ($0 < i \leq 1$) engendre une valeur de projet présentant des rendements d'échelle croissants.

Nous définirons alors la taille efficace d'une communauté épistémique comme la solution du problème d'optimisation suivant : considérant une vaste population homogène (par exemple, l'ensemble des développeurs de logiciel libre, ou encore l'ensemble des scientifiques d'un domaine de recherche donné), quelle est, parmi les partitions de cette population en communautés de même taille, celle qui maximise l'espérance actualisée de l'utilité sociale ?

La taille de la population de référence étant fixée, maximiser l'espérance actualisée de l'utilité sociale associée à une partition de "finesse" N revient à maximiser l'espérance actualisée de l'utilité par tête au sein de chacune des communautés constitutives d'une telle partition[4]. Or l'utilité par tête

[4] Notons que réduire le bilan net d'un projet communautaire à la valeur actualisée de l'utilité recueillie en fin de projet revient à supposer que le coût d'opportunité du temps

disponible en fin de projet dans une communauté de taille N vaut :

$$\widehat{U} = \frac{U}{N} = U_\alpha(K, N^i) = K^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} N^{\frac{i}{1+\alpha}} \ .$$

C'est une pondération géométrique, avec les poids respectifs $\alpha/(1+\alpha)$ et $1/(1+\alpha)$, de la capacité modulaire K et de l'ouverture modulaire N^i.

Compte tenu des aléas affectant les durées des phases successives de conception et d'implémentation (voir annexe), l'utilité par tête actualisée à la date de démarrage de projet est une variable aléatoire $\widetilde{U}$. Si ω est le taux d'actualisation, alors, par définition de l'équivalent-certain T_P de la durée de projet, l'espérance de $\widetilde{U}$ a pour expression :

$$E[\widetilde{U}] = K^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} N^{\frac{i}{1+\alpha}} \cdot e^{-\omega T_P} = K^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} N^{\frac{i}{1+\alpha}} \cdot \exp\left[-\frac{\omega}{\lambda} K(N^{-e} + \rho N^i)\right] \ .$$

Tel est donc finalement le critère devant être maximisé par rapport aux deux variables K (capacité modulaire) et N (taille communautaire), afin de déterminer la partition efficace d'une population de référence composée d'individus similaires.

Le critère $E[\widetilde{U}]$ n'est pas séparable par rapport aux variables K et N. Choisissant en revanche la durée certaine équivalente T_P et la taille communautaire N comme couple de variables endogènes indépendantes dans la résolution du problème de maximisation, on peut écrire, après élimination de la capacité modulaire K (fonction de T_P et de N) et une transformation logarithmique :

$$\begin{aligned}
\ln E[\widetilde{U}] &= F(T_P) + G(N) + \text{cste} \ , \\
F(T_P) &= \frac{\alpha}{1+\alpha} \ln T_P - \omega T_P \ , \\
G(N) &= \frac{i}{1+\alpha} \ln N - \frac{\alpha}{1+\alpha} \ln(N^{-e} + \rho N^i) \ .
\end{aligned}$$

Le critère $\ln E[\widetilde{U}]$ étant cette fois séparable selon les variables T_P et N, sa maximisation peut être décomposée en deux problèmes découplés, que nous traiterons successivement : d'une part, l'optimisation de la durée T_P d'un projet communautaire (maximisation du sous-critère $F(T_P)$) ; d'autre part, l'optimisation de la taille communautaire N (maximisation du sous-critère $G(N)$).

individuel de participation est négligeable. Cette hypothèse est admissible dans le cas d'une activité de nature épistémique, du type logiciel libre ou recherche scientifique, pour laquelle les agents manifestent un coût d'opportunité de leur temps très faible, voire même négatif, compte tenu des contreparties retirées en termes d'apprentissage et de réputation.

3.2 Durée efficace et capacité adaptée

On observe que la durée certaine équivalente T_P exerce sur le sous-critère $F(T_P)$ deux influences contraires : d'un côté, disposer d'une durée T_P accrue permet d'augmenter la capacité modulaire K, ce qui rehausse la valeur finale du projet, de manière d'autant plus marquée que l'appétence α pour la capacité est élevée (terme positif $\alpha \ln T_P/(1+\alpha)$) ; mais, à cet effet de création de valeur, s'oppose un effet de retardement de la date à laquelle la valeur finale est disponible (terme négatif $-\omega T_P$), un effet d'autant plus ressenti que les agents sont impatients (ω élevé). De l'arbitrage entre les deux effets précédents résulte une durée optimale T_P^* d'autant plus longue que les agents sont patients (ω faible) et que les utilisateurs valorisent la capacité (α élevé), soit :

$$F'(T_P^*) = 0 \ , \ F''(T_P^*) < 0 \Longrightarrow T_P^* = \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{1}{\omega} \ .$$

A toute taille communautaire N fixée, non nécessairement optimale, correspond une capacité modulaire "adaptée" à cette taille, soit $K_a(N)$, c'est-à-dire permettant de respecter la durée de projet optimale T_P^*. On a :

$$K_a(N) = \frac{\lambda T_P^*}{N^{-e} + \rho N^i} = \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{\lambda}{\omega} \cdot \frac{1}{N^{-e} + \rho N^i} \ .$$

La capacité adaptée $K_a(N)$ est, de manière naturelle, d'autant plus élevée que les membres de la communauté, en amont, travaillent à un rythme épistémique soutenu (λ/ω élevé) et que les utilisateurs, en aval, valorisent fortement la capacité du projet (α élevé) ; par ailleurs, $K_a(N)$ est d'autant plus élevée que l'externalité de créativité e est forte, que l'exigence d'intégration i est modeste et que la résistance ρ à l'implémentation est faible.

Quant aux variations de la capacité adaptée $K_a(N)$ par rapport à la taille communautaire N, elles sont inverses de celles de la fonction $N^{-e} + \rho N^i$, déjà étudiée plus haut. On en déduit que :

$$N \lesseqgtr \overline{N} \Longrightarrow K_a'(N) \gtreqless 0 \ ,$$

où $\overline{N}$ est la taille qui minimise la durée certaine équivalente du projet. L'explication est immédiate : puisqu'il est efficace de maintenir invariante (au niveau T_P^*) la durée équivalente du projet quelle que soit la taille communautaire N, il convient d'utiliser la capacité modulaire comme un instrument de stabilisation de la durée et, par conséquent, d'augmenter cette capacité en même temps que la taille communautaire tant que $N < \overline{N}$ (afin de compenser l'effet d'abaissement de la durée à capacité constante), puis de la diminuer au contraire lorsque $N > \overline{N}$ (afin de compenser l'effet d'accroissement de la durée à capacité constante).

3.3 Taille communautaire efficace

La taille communautaire N influence le sous-critère $G(N)$ de deux manières : d'un côté (terme positif croissant $i \ln N$), une communauté de plus grande dimension apporte au projet collectif un supplément de valeur d'intégration, davantage de modules étant reliés entre eux au degré i ; d'un autre côté (terme négatif proportionnel à $\ln(N^{-e} + \rho N^i)$), augmenter N conduit à réviser la capacité adaptée $K_a(N)$ des modules individuels, ce qui contribue à renforcer la valeur du projet lorsque cette révision s'opère à la hausse ($N < \overline{N} \Longrightarrow N^{-e} + \rho N^i$ décroissant) et à la dégrader dans le cas contraire ($N > \overline{N} \Longrightarrow N^{-e} + \rho N^i$ croissant).

La maximisation de la fonction $G(N)$ par rapport à N, sur le domaine $N \geq 1$, détermine l'arbitrage optimal entre les différents effets précédents et elle permet, après un calcul élémentaire, de calculer la taille communautaire efficace N^*. Deux régimes sont à distinguer, selon les préférences relatives des utilisateurs entre capacité et puissance :

- *Régime 1. Préférence marquée pour la puissance* ($\alpha \leq 1$) *: communauté divergente.*
  Lorsque les utilisateurs d'un système manifestent une moindre appétence relative pour la capacité des modules que pour leur intégration au sein d'un tout cohérent, le critère $G(N)$ est monotone croissant pour tout $N \geq 1$:

  $$\alpha \leq 1 \Longrightarrow G'(N) \geq 0 \quad \forall N \geq 1 \Longrightarrow N^* \longrightarrow \infty \ .$$

  Dans ce cas, il s'avère efficace de réunir tous les agents de la population de référence pour élaborer un très grand système ($N^* \to \infty$), dont les modules sont de très petite capacité ($K(N^*) \to 0$), mais connectés les uns aux autres : vision quelque peu utopique d'une tour de Babel dont les ouvriers réussiraient à établir le dialogue...

- *Régime 2. Préférence marquée pour la capacité* ($\alpha > 1$) *: communauté bornée, éventuellement dégénérée en singleton.*
  Sous ce régime, deux sous-cas sont à distinguer, selon que le potentiel communautaire π est supérieur ou inférieur à la résistance à l'implémentation ρ :

  - *Fort potentiel communautaire* ($\rho < \pi$) *: pas de dégénérescence.*
  Pour toute valeur $\alpha > 1$, le critère $G(N)$, alors croissant puis décroissant selon N, atteint un maximum unique pour une taille communaire N^* finie telle que $N^* > \overline{N} > 1$, si bien qu'il est efficace de partitionner la population de référence en communautés dont la taille N^* est bornée et supérieure à l'unité :

  $$\forall \alpha > 1 \ \Longrightarrow 1 < \overline{N} = \left(\frac{\pi}{\rho}\right)^{\frac{1}{\eta}} < N^* = \left(\frac{\pi\alpha + 1}{\rho(\alpha - 1)}\right)^{\frac{1}{\eta}} < \infty \ .$$

La taille optimale N^* est celle qui réalise le meilleur arbitrage entre capacité et puissance, compte tenu de ce que, lorsque $N > \overline{N}$, la capacité adaptée $K_a(N)$ diminue avec la taille communautaire, tandis que la puissance N^{1+i} augmente.

– *Faible potentiel communautaire* ($\rho > \pi$) *: dégénérescence en cas de forte préférence pour la capacité.*
Tant que $1 < \alpha < \alpha_d = (\rho+1)/(\rho-\pi)$, le critère $G(N)$, croissant puis décroissant selon N, est maximal pour une taille communautaire N^* finie et supérieure à l'unité ; mais, dès que $\alpha \geq \alpha_d$, $G(N)$ devient monotone décroissant pour tout $N \geq 1$, si bien que la communauté efficace dégénère alors en un singleton ($N^* = 1$) :

$$\begin{aligned} 1 &< \alpha < \alpha_d = \frac{\rho+1}{\rho-\pi} \Longrightarrow \overline{N} = 1 < N^* = \left(\frac{\pi\alpha+1}{\rho(\alpha-1)}\right)^{\frac{1}{\eta}} < \infty \ , \\ \alpha &\geq \alpha_d = \frac{\rho+1}{\rho-\pi} \Longrightarrow \overline{N} = 1 = N^* \ . \end{aligned}$$

Autrement dit, si le marché final valorise peu la puissance d'un système ($\alpha \geq \alpha_d$), alors la perspective des problèmes d'implémentation devant être surmontés pour engendrer cette puissance, nombreux car $\rho > \pi$, rend efficace une structure totalement "désintégrée", dans laquelle il n'existe aucune communauté *stricto-sensu* et où chacun des agents de la population développe individuellement un module de manière autarcique. Le domaine de dégénérescence est d'autant plus étendu (seuil α_d bas) que la résistance à l'implémentation est forte (ρ élevé) et que le potentiel communautaire est faible (π petit).

On observe que la taille communautaire efficace N^*, lorsqu'elle est finie et supérieure à l'unité, excède systématiquement la taille $\overline{N}$ qui minimiserait la durée certaine équivalente du projet (pour un même choix adapté $K_a(N^*)$ de la capacité modulaire). En effet, si faire croître la communauté au-delà du seuil $\overline{N}$ retarde l'achèvement du projet, ceci est sur-compensé, du moins tant que $\overline{N} < N < N^*$, par l'effet de création de valeur résultant d'une plus forte puissance du système.

Par ailleurs, la taille optimale N^* est une fonction :

– décroissante de l'appétence α pour la capacité, car plus la puissance systémique est valorisée par les utilisateurs, plus il est opportun d'élever la taille communautaire au dessus de $\overline{N}$ en dépit d'un délai de mise à disposition.
– décroissante de la résistance ρ à la mise au point, car plus forte est cette résistance, plus chronophage est l'implémentation d'un système comprenant un grand nombre de modules individuels ;
– croissante du potentiel communautaire $\pi = e/i$, car plus un allongement de la phase d'implémentation est aisément compensé par un

racourcissement de phase de conception, moins il devient pénalisant d'augmenter la taille communautaire afin de créer de la valeur via une montée en puissance du système ;
- décroissante de l'élasticité d'échelle $\eta = e + i$, car plus celle-ci est élevée, moins il est nécessaire d'accroître la taille communautaire pour atteindre la division efficace du temps entre implémentation et conception[5].

4 Discussion : dilemme stabilité/efficacité

Peut-on, en maintenant invariantes au cours du temps des règles d'adhésion à la communauté et de rétribution individuelle du travail communautaire, concilier l'objectif d'efficacité (analysé plus haut) avec celui d'incitation à la participation ? On serait a priori tenté de supposer qu'une rémunération égalitaire des agents permet naturellement d'atteindre ce résultat, puisque la taille efficace d'une communauté est précisément celle qui rend maximale la valeur par tête. Or, tel n'est pas le cas, car si un partage égalitaire incite bien à l'amorçage de la communauté, il conduit en revanche à dépasser la taille efficace N^*.

Pour le montrer, plaçons nous dans le cas où la taille efficace N^* est bornée et supérieure à l'unité, le critère d'efficacité $G(N)$ étant alors croissant sur l'intervalle $[1, N^*]$, puis décroissant sur l'intervalle $]N^*, +\infty[$ et tel que $G(N) \to -\infty$ lorsque $N \to \infty$. Supposons par ailleurs que les entrées ont lieu séquentiellement et que le travail communautaire ne débute que lorsque le flux d'entrée est tari : c'est à ce moment de démarrage que la capacité modulaire est adaptée à la taille communautaire.

Dans un tel contexte, les entrées se poursuivent dans un premier temps jusqu'à la taille efficace N^*, car tant que $1 < N < N^*$, les participants déjà présents anticipent un surcroît de gain dû à l'entrée des nouveaux : en effet, le gain par tête à capacité adaptée est une fonction croissante du critère $G(N)$, lui-même croissant sur l'intervalle $[1, N^*]$. Toutefois, en l'absence de barrière à l'entrée, et bien que le critère d'efficacité $G(N)$ et le gain par tête soient maintenant simultanément décroissants, les entrées se prolongent au-delà de N^*, jusqu'à ce que la communauté atteigne la taille $\overline{\overline{N}}$ où le gain par tête s'est abaissé au niveau que le postulant à l'entrée pourrait obtenir par lui-même, en demeurant hors de la communauté : $\overline{\overline{N}}$ est l'unique racine

[5] Les influences séparées des deux paramètres e et i sur la taille communautaire efficace N^* sont similaires à celles qu'ils exercent sur la taille $\overline{N}$ minimisant la durée à capacité modulaire constante : augmenter l'exigence d'intégration i tend doublement à réduire la taille efficace, en diminuant le potentiel communautaire π et en augmentant la sensibilité η au changement déchelle ; en revanche, augmenter e joue dans deux directions contraires, favorisant d'un côté le développement communautaire en accroissant le potentiel π, mais le freinant d'un autre côté en accroissant la sensibilité η.

strictement supérieure à l'unité de l'équation $G(N) = G(1)$. Ce n'est qu'une fois la taille $\overline{\overline{N}}$ atteinte que cessent les incitations individuelles à l'entrée, les individus préfèrant alors développer leur module de manière autarcique : $N > \overline{\overline{N}} \Longrightarrow G(N) < G(1)$.

En définitive, la communauté efficace, de taille N^*, n'est pas stable, alors que la communauté stable, de taille $\overline{\overline{N}} > N^*$, n'est pas efficace. Il en résulte qu'une communauté épistémique tend spontanément à se développer davantage qu'il ne serait opportun, c'est-à-dire au-delà du point à partir duquel l'avantage retiré du "club de créativité" au cours de la phase de conception est surcompensé par "le coût de congestion" subi au cours de la phase d'implémentation[6].

Dans notre analyse, le dilemme stabilité/efficacité, c'est-à-dire l'écart entre optimum théorique et équilibre spontané, provient d'une discordance entre les incitations respectivement individuelles et collectives à la formation d'une communauté, discordance entraînant un sur-dimensionnement, par défaut d'internalisation des coûts de congestion. L'inefficacité de l'équilibre peut également résulter de comportements opportunistes du type passager clandestin (*free riding*), aspect récurrent dans la litterature sur la formation des coalitions, mais non modélisé ici. Le *free riding* provoque quant à lui une inefficacité de sous-dimensionnement, l'opportunisme de certains agents décourageant en effet la participation communautaire, une explication fréquemment avancée de la limite à la croissance des communautés (voir Mustonen [2002], pour une discussion).

Si, conjugué avec un principe de libre entrée dans la communauté, un mode de rémunération individuelle de la participation communautaire basé sur la valeur par tête ne permet pas de résoudre le dilemme stabilité/efficacité, quelles solutions sont envisageables ? Deux voies alternatives sont possibles : ou bien, adopter un mode de rétribution autre qu'égalitaire ; ou bien, contrôler les entrées dans la communauté. Dans le premier cas, une fois définie la règle d'allocation des gains, seules les incitations individuelles à participer assurent la régulation de la taille de la communauté ; dans le second cas, c'est une procédure hiérarchique qui impose cette régulation.

Parmi les modes de rétribution envisageables, une règle "incrémentaliste" semble a priori raisonnablement candidate à résoudre le dilemme : si chaque membre valorise son entrée dans la communauté à hauteur de ce qu'il apporte à cette dernière (rémunération au gain incrémental et non au gain

[6] L'effet de congestion qui caractérise le travail communautaire dans la phase d'implémentation et qui tend à abaisser la taille efficace, a également été mis en évidence par Jackson et Wolinsky [1996], dans le contexte d'un réseau de communautés de chercheurs co-écrivant des papiers. Cependant, si le problème traité par ces auteurs est proche du nôtre par l'objet, il s'en éloigne par l'analyse : le modèle de Jackson et Wolinsky considère en effet un réseau présentant des liens individualisés.

moyen), alors aucune entrée profitable pour le postulant ne réduit le gain des membres déjà présents. Toutefois, il est peu réaliste de supposer que les membres d'une même communauté puissent être durablement rémunérés de manière asymétrique, en fonction de leur apport incrémental "historique", au moment de leur entrée. En outre, les incitations créées par la règle incrémentaliste ne décentralisent pas l'efficacité, au sens où nous l'avons défini auparavant (maximisation du gain par tête) : rien ne garantit que les entrées cessent au delà de N^*, car il suffit que le gain incrémental d'un nouvel entrant soit à la fois inférieur au gain moyen des membres déjà présents et supérieur au gain que ce postulant pourrait obtenir par lui-même, pour qu'il soit incité à participer, au prix d'une baisse du gain par tête, et donc d'une perte d'efficacité. Le concept de *valeur nette de Shapley*, proposé par Rotschild [2001] pour étudier la stabilité d'un cartel, apporte un raffinement à la règle incrémentaliste, mais il ne suffit pas toutefois à résoudre le dilemme efficacité/stabilité[7].

Finalement, seul un contrôle des entrées semble pouvoir assurer la concordance entre stabilité et efficacité : les membres en place d'une communauté n'acceptent aucun nouveau venu susceptible de faire baisser le gain moyen. Ici, ce n'est plus la régulation des incitations individuelles via une règle d'allocation qui assure la stabilité communautaire, mais l'exercice d'une autorité. Force est de constater qu'avec une règle d'allocation égalitaire (ou inspirée d'un principe égalitaire) et une conception parétienne de l'efficacité, le dilemme stabilité/efficacité ne peut être convenablement résolu de manière décentralisée et qu'il ne peut faire l'économie d'une procédure hiérarchique et autoritaire de contrôle des entrées. Soulignons qu'un tel contrôle correspond aux pratiques en vigueur dans les communautés de logiciel libre : ces communautés fonctionnent en effet généralement selon une structure fortement hiérarchisée, dans laquelle les individus appartenant au "noyau" (niveau supérieur de la hiérarchie) ont tout pouvoir pour accepter ou refuser des ajouts au système existant.

[7] La valeur nette de Shapley mesure le gain global qu'un individu apporte en se joignant à une coalition, net des pertes que subissent certains des individus de cette coalition après son entrée. Dans notre modèle, tous les individus étant identiques, il ne peut y avoir que des gagnants ou que des perdants à toute nouvelle entrée dans une communauté. Il en résulte que la règle de la valeur nette de Shapley bloque le processus d'entrée dès que la baisse du gain moyen est telle que, même en acceptant un gain inférieur à son apport incrémental, un entrant potentiel ne peut plus compenser l'ensemble des membres déjà présents pour la perte qu'il leur fait subir. Puisque ce blocage intervient alors que le gain moyen s'abaisse, la taille communautaire efficace est nécessairement dépassée à l'équilibre.

Références

[1] **Auray N.**, 2003, "La régulation de la connaissance : arbitrage sur la taille et gestion aux frontières de la communauté Debian", *Revue d'Economie Politique*, ce numéro.

[2] **Dutta B. et M.O. Jackson**, 2003, "On the Formation of Networks and Groups", in : Dutta B. et M.O. Jackson (eds.), *Networks and Groups : Models of Strategic Formation*, Heidelberg : Springer Verlag.

[3] **Gensollen M.**, 2003, "Biens informationnels et communautés médiatées", *Revue d'Economie Politique*, ce numéro.

[4] **Jackson M.O.**, 2003, "The Stability and Efficiency of Economic and Social Networks", in : Sertel M. and S. Koray (eds.), *Advances in Economic Design*, Heidelberg : Springer Verlag.

[5] **Foray D. et J-B. Zimmermann**, 2001, "L'économie du logiel libre : organisation coopérative et incitation à l'innovation", *Revue Economique*, 52 (H.S. Economie de l'Internet), pp. 77-93.

[6] **Jackson M.O. et A. Wolinsky**, 1996, "A Strategic Model of Social and Economic Networks", *Journal of Economic Theory*, 71, pp.44-74.

[7] **Lakhani K. et E. von Hippel**, 2000, "How Open Source Software Works : 'Free' User-to-User Assistance", MIT Sloan School of Management, *working paper* #4117.

[8] **Lerner J. et J. Tirole**, 1999, "Some Simple Economics of Open Source", *Journal of Industrial Economics*, 50, pp.197-234.

[9] **Mockus A., Fielding R. et J. Herbsleb**, 2000, "A Case Study of Open Source Development : the Apache Server", *mimeo*.

[10] **Mustonen M.**, 2002, "Copyleft - The Economics of Linux and Other Open Source Software, *Information Economics and Policy*, forthcoming.

[11] **Peyrache E, Cremer J. et J. Tirole**, 2000, "Some Reflections on Open Source Software", *Communications & Stratégies*, 40, pp.139-159.

[12] **Raymond E.**, 1999, *The Cathedral and the Bazaar*, O'Reilly.

[13] **Rotschild R.**, 2001, "On the Use of a Modified Shapley Value to Determine the Optimal Size of a Cartel", *Journal of Economic Behavior and Organization*, 45 : 37-47.

Annexe : Processus épistémique

Afin d'analyser le caractère aléatoire du processus épistémique, examinons d'abord sur la phase "A" de conception. Nous admettrons que le nombre de pas élémentaires constituant cette phase est une variable aléatoire discrète $\widetilde{A}$, que l'on supposera distribuée selon une loi de Poisson d'espérance KN^{1-e} :

$$\Pr(\widetilde{A} = A) = \Pi(A) = \frac{(KN^{1-e})^A}{A} e^{-KN^{1-e}} \qquad A = 0, 1, \ldots .$$

Cette hypothèse traduit l'incertitude ex ante : le nombre KN^{1-e} de "briques" élémentaires, prévisible au départ pour concevoir le système des N modules de capacité unitaire K, ne constitue en fait qu'une moyenne du nombre de pas qui devront effectivement être accomplis ; de bonnes ou de mauvaises surprises porteront ce nombre A en dessous ou au dessus de sa valeur moyenne KN^{1-e}. A la limite, si les modules sont déjà entièrement préconçus au départ, on a $A = 0$; à l'autre extrême, s'il sont totalement innovants et soulèvent de considérables difficultés de conception, on a $A \to \infty$.

Les N individus constituant une communauté donnée œuvrent ensemble à la réalisation séquentielle de chacun des A pas de conception[8]. Pour un individu donné, on suppose que la dynamique de créativité est représentable par un processus de Poisson dont les évènements sont les instants de résolution et dont le paramètre λ est la performance épistémique individuelle, supposée la même pour tous les individus : la probabilité qu'un individu particulier apporte la solution d'un pas donné au cours d'un intervalle de temps infinitésimal dt vaut ainsi λdt. Tous les individus réunissant leurs efforts sur chacun des pas, la probabilité que l'un d'entre eux au moins (le plus rapide) résolve un pas donné en un temps dt vaut $\lambda N dt$, si bien que le processus collectif de conception est un processus de Poisson de paramètre λN.

Pour un tel processus, on sait que le nombre d'occurrences d'évènements dans un laps de temps donné T suit une loi de Poisson de paramètre λNT. Il en résulte que la probabilité que $A-1$ pas de conception exactement soient réalisés au bout d'un temps T vaut $\left[(\lambda NT)^{A-1}/(A-1)!\right] e^{-\lambda NT}$, d'où l'on déduit la probabilité que le $A^{\text{ième}}$ et dernier pas ($A \geq 1$) soit achevé entre T et $T + dT$, soit $\left[(\lambda NT)^{A-1}/(A-1)!\right] e^{-\lambda NT} \lambda N dT$. Ainsi, la durée de la phase

[8] Il serait possible de lever cette hypothèse de séquentialité des pas de créativité, au prix toutefois d'une complication du modèle : une communauté pourrait alors choisir de constituer des sous-groupes de travail, afin d'exécuter simultanément plusieurs pas. L'avantage d'une telle résolution parallèlle serait en partie contrebalancé par un accroissement du temps moyen nécessaire à l'accomplissement de chacun des pas, puisque moins d'individus s'y consacreraient.

de conception est une variable aléatoire $\widetilde{T}_A$, elle même conditionnée par la variable aléatoire $\widetilde{A}$ engendrant le nombre A de pas élémentaires. La fonction de densité de la variable $\widetilde{T}_A$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$, conditionnellement à $\widetilde{A} = A$ $(A = 1, 2, ...)$, s'écrit :

$$\Phi_A(T) = (\lambda N)^A \frac{T^{A-1}}{(A-1)!} e^{-\lambda N T} \ .$$

A partir de la densité conditionnelle de la durée $\Phi_A(T)$ et de la loi $\Pi(A)$ du nombre de pas, on peut définir l'équivalent-certain de la durée de conception, soit T_A, comme l'échéance certaine à laquelle devrait être disponible la valeur finalement créée pour qu'un agent neutre au risque, mais "impatient", soit indifférent entre cette échéance déterministe fictive et l'échéance aléatoire réelle. Si ω est le taux d'actualisation (taux d'impatience) des membres de la communauté, cette définition implique :

$$e^{-\omega T_A} = E[e^{-\omega \widetilde{T}_A}] = \Pi(0).1 + \sum_{A=1}^{\infty} \Pi(A) \int_0^{\infty} \Phi_A(T)\, e^{-\omega T} dT \ .$$

Remplaçant $\Pi(A)$ et $\Phi_A(T)$ par leurs expressions explicitées plus haut, il vient successivement :

$$\begin{aligned}
e^{-\omega T_A} &= \left[1 + \sum_{A=1}^{\infty} \frac{(KN^{1-e})^A}{A!} \int_0^{\infty} (\lambda N)^A \frac{T^{A-1}}{(A-1)!} e^{-(\lambda N+\omega)T} dT\right] e^{-KN^{1-e}} \ , \\
e^{-\omega T_A} &= \left[1 + \sum_{A=1}^{\infty} \frac{(KN^{1-e})^A}{A!} \left(\frac{\lambda N}{\lambda N + \omega}\right)^A \int_0^{\infty} \frac{x^{A-1}}{(A-1)!} e^{-x} dx\right] e^{-KN^{1-e}} \ , \\
e^{-\omega T_A} &= \left[\sum_{A=0}^{\infty} \frac{(KN^{1-e})^A}{A!} \left(\frac{\lambda N}{\lambda N + \omega}\right)^A\right] e^{-KN^{1-e}} \ , \\
e^{-\omega T_A} &= \exp - \left(1 - \frac{\lambda N}{\lambda N + \omega}\right) KN^{1-e} = \exp - \left(\frac{\omega K N^{1-e}}{\lambda N + \omega}\right) \ ,
\end{aligned}$$

d'où, finalement :

$$T_A = \frac{1}{\lambda} K N^{-e} \cdot \frac{1}{1 + \omega/\lambda N} \ .$$

Afin d'interpréter cette expression de l'équivalent certain T_A de la durée de la phase de conception, il est utile de la relier à l'espérance $E[\widetilde{T}_A]$ et à la

variance $V[\widetilde{T}_A]$ de cette durée, dont les expressions sont[9] :

$$E[\widetilde{T}_A] = \frac{1}{\lambda} K N^{-e} \quad , \quad V[\widetilde{T}_A] = \frac{2}{\lambda^2} K N^{-(1+e)} \ .$$

On remarque d'abord que, sous l'effet de l'externalité de créativité e, l'espérance $E[\widetilde{T}_A]$ ainsi que la variance $V[\widetilde{T}_A]$ décroissent en fonction de la taille communautaire N : autrement dit, lorsque N augmente, d'une part le gain de temps engendré par l'externalité surcompense l'accroissement de la charge de travail collective ; d'autre part, l'incertitude sur la durée du processus est atténuée par l'effet de "foisonnement" qu'engendre le travail en groupe.

Il apparaît ensuite que le terme correctif qui rend la durée certaine équivalente T_A systématiquement inférieure à l'espérance $E[\widetilde{T}_A]$ vaut :

$$\frac{\omega}{\lambda N} = \frac{\omega}{2} \frac{V[\widetilde{T}_A]}{E[\widetilde{T}_A]} \ .$$

La correction est ainsi d'autant plus marquée que la variance $V[\widetilde{T}_A]$ est élevée : en effet, plus forte est cette variance, plus probables deviennent les durées s'écartant inférieurement ou supérieurement de la durée espérée $E[\widetilde{T}_A]$; or, du fait de l'actualisation, les durées s'écartant supérieurement de l'espérance pèsent moins dans l'appréciation des agents que les durées s'en écartant inférieurement, d'où une durée certaine équivalente inférieure à l'espérance de la durée. Tout se passe en définitive comme si l'incertitude, couplée à l'actualisation, produisait un "effet d'anticipation", qui rapproche l'horizon d'achèvement de la phase de créativité. Toutefois, si les agents sont non seulement impatients ($\omega > 0$), mais encore "risquophobes", alors cet effet d'anticipation est contrebalancé par un effet d'aversion pour le risque.

Dans la suite, nous négligerons l'effet d'anticipation, ce qui revient, soit à supposer qu'il est effacé par l'aversion pour le risque, soit encore, en restant

[9] Développant l'équation définissant T_A au second ordre en ω , on obtient :

$$\begin{aligned}
\omega T_A &= -\ln E[1 - \omega \widetilde{T}_A + \frac{\omega^2}{2} \widetilde{T}_A^2 + \varepsilon(\omega^3)] \ , \\
\omega T_A &= -\ln\{1 - \omega E[\widetilde{T}_A] + \frac{\omega^2}{2} E[\widetilde{T}_A^2] + \varepsilon(\omega^3)\} \ , \\
\omega T_A &= \omega E[\widetilde{T}_A] - \frac{\omega^2}{2} E[\widetilde{T}_A^2] + \frac{\omega^2}{2} E^2[\widetilde{T}_A] + \varepsilon(\omega^3) \ , \\
T_A &= E[\widetilde{T}_A] - \frac{\omega}{2} V[\widetilde{T}_A] + \varepsilon(\omega^2) \ .
\end{aligned}$$

Développant par ailleurs l'expression explicite de T_A au premier ordre en ω et identifiant les deux développements limités ainsi obtenus pour T_A, il vient :

$$\frac{1}{\lambda} K N^{-e} - \frac{\omega}{\lambda^2} K N^{-(1+e)} + \varepsilon(\omega^2) = E[\widetilde{T}_A] - \frac{\omega}{2} V[\widetilde{T}_A] + \varepsilon(\omega^2) \ ,$$

d'où les expressions de $E[\widetilde{T}_A]$ et $V[\widetilde{T}_A]$.

dans le cadre strict de notre modèle, à admettre que la performance épistémique individuelle λ est forte devant le taux d'actualisation ω : en effet, si $\lambda >> \omega$, le terme $1/(1+\omega/\lambda N)$ est proche de l'unité pour tout $N \geq 1$, si bien que l'on peut procéder à l'approximation :

$$T_A \simeq E[\widetilde{T}_A] = \frac{1}{\lambda} K N^{-e} \ .$$

L'hypothèse $\lambda >> \omega$ revient à considérer, de manière assez réaliste, que les membres d'une communauté épistémique créent de la valeur à un rythme beaucoup plus rapide que celui auquel ils la déprécient...

Exactement la même analyse que celle venant d'être menée pour modéliser le processus aléatoire de conception peut maintenant être appliquée au processus aléatoire d'implémentation, en introduisant deux variables aléatoire $\widetilde{B}$ et $\widetilde{T}_B$, représentant respectivement le nombre de pas élémentaires d'implémentation et la durée de réalisation de l'ensemble de ces pas. En développant des calculs absolument identiques (qu'il n'est donc pas utile de répéter), dans lesquels l'espérance KN^{1-e} du nombre de pas de conception est remplacée par l'espérance $\rho K N^{1+i}$ du nombre de pas d'implémentation, et sous la même hypothèse $\lambda >> \omega$, on obtient l'équivalent-certain T_B de la durée aléatoire $\widetilde{T}_B$ de mise au point, soit :

$$T_B \simeq E[\widetilde{T}_B] = \frac{\rho}{\lambda} K N^{i} \ .$$

Les variables aléatoires $\widetilde{T}_A$ et $\widetilde{T}_B$ représentant les durées respectives des deux phases de créativité et d'implémentation étant supposées indépendantes entre elles, l'équivalent-certain T_P de la durée totale $\widetilde{T}_P = \widetilde{T}_A + \widetilde{T}_B$ du projet vérifie :

$$e^{-\omega T_P} = E[e^{-\omega \widetilde{T}_P}] = E[e^{-\omega \widetilde{T}_A}] \cdot E[e^{-\omega \widetilde{T}_B}] = e^{-\omega (T_A + T_B)} \ ,$$

d'où finalement :

$$T_P = T_A + T_B = \frac{K}{\lambda} \cdot (N^{-e} + \rho N^{i}) \ .$$