Introduction à la théorie des jeux

David Bounie

Introduction

- Nous avons étudié la firme concurrentielle et le monopole.
- Il existe des structures de marché intermédiaires : l’oligopole.
- Une forme particulière de l’oligopole est le duopole : deux firmes.

Choisir une stratégie

- 2 firmes produisent un bien identique.
- 4 variables sont à considérer.
- Le prix de chaque entreprise.
- L'output de chaque entreprise.
- Plusieurs cas peuvent être analysés.

Les jeux séquentiels

- La firme connaît les choix effectués par l'autre entreprise.
- La 1ere firme est le leader.
- La 2ème firme est le suiveur.
- Les interactions stratégiques entre 1 et 2 constituent un jeu séquentiel.
- Les variables stratégiques peuvent être les prix ou les output.

Les jeux simultanés

- **La firme ne connaît pas les choix effectués par l'autre entreprise.**
- **La firme doit prévoir les décisions de l'autre lorsqu'elle fixe le prix ou le niveau d'output à produire.**
- **Les interactions stratégiques entre 1 et 2 constituent un jeu simultané.**

Le rôle de la théorie des jeux

Elle permet de modéliser le comportement stratégique des agents qui comprennent que leur comportement dépend de leur action mais également de l'action des autres agents.

Quelques applications

- **L'étude des oligopoles**
- **L'étude des cartels**
- **…**

- **Jeux militaires**
- **Biologie**
- **Ethologie**
- **…**

Qu'est ce qu'un jeu ?

- **Un jeu se compose de :**
  - **Un ensemble de joueurs.**
  - **Un ensemble de stratégies pour chaque joueur.**
  - **Des gains associés à chaque stratégie des joueurs.**

Exemple très simple de jeu entre 2 agents

(sous forme normale)

Exemple

Jeu à 2 joueurs avec 2 stratégies possibles

- Les joueurs s'appellent A et B.
- Le joueur A a deux stratégies : "up" ou "down".
- Le joueur B a deux stratégies : "Left" ou "Right".
- La matrice des gains est représentée comme suit :

Théorie des jeux

Joueur B

		L	R
Joueur A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

Les gains du joueur A sont (ici,)

Théorie des jeux

Joueur B

Joueur A		L	R
	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

Les gains du joueur B sont (, ici)

Théorie des jeux

		Joueur B	
		L	R
Joueur A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

Exemple : Si A joue Up et B joue Right alors A gagne 1 et B gagne 8

Théorie des jeux

			L	R
			Joueur B	
Joueur A	**U**		**(3,9)**	**(1,8)**
	D		**(0,0)**	**(2,1)**

Une situation de jeu est une paire (ex : (U,R)) où le premier élément est la stratégie choisie par le joueur A et le deuxième élément est la stratégie choisie par le joueur B

Théorie des jeux

		Joueur B	
		L	R
Joueur A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

Quel est le résultat de ce jeu ?

Théorie des jeux

		Joueur B	
		L	R
Joueur A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

(U,R) est-il un résultat possible ?

Théorie des jeux

		Joueur B	
		L	R
Joueur A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

(U,R) est-il un résultat possible ?

Si B joue Right alors la meilleure réponse de A est Down. Ainsi les gains de A passeront de 1 à 2. Donc (U,R) n'est pas possible.

Théorie des jeux

		Joueur B	
		L	R
Joueur A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

(D,R) est-il un résultat possible ?

Théorie des jeux

		Joueur B	
		L	R
Joueur A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

(D,R) est-il un résultat possible ?

Si B joue Right alors la meilleure réponse de A est Down.

Théorie des jeux

		Joueur B: L	Joueur B: R
Joueur A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

(D,R) est-il un résultat possible ?

Si B joue Right alors la meilleure réponse de A est Down.
Si A joue Down alors la meilleure réponse de B est Right. Donc, (D,R) est possible.

Théorie des jeux

		Joueur B	
		L	R
Joueur A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

(D,L) est-il un résultat possible ?

Théorie des jeux

		Joueur B	
		L	R
Joueur A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

(D,L) est-il un résultat possible ?

Si A joue Down, la meilleure réponse de B est R, donc (D,L) n’est pas possible.

Théorie des jeux

Joueur B

		L	R
Joueur A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

(U,L) est-il un résultat possible ?

Théorie des jeux

		Joueur B	
		L	R
Joueur A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

(U,L) est-il un résultat possible ?

Si A joue Up, la meilleure réponse de B est Left.
Si B joue Left, la meilleure réponse de A est Up.
Donc (U,L) est possible.

Théorie des jeux: notation

Un jeu en forme normale est décrit comme suit:

1. Un ensemble de N joueurs, $I \equiv \{1,2,\ldots,N\}$
2. Chaque joueur i, $i \in I$, a un ensemble d'actions A^i qui est l'ensemble de toutes les actions possibles pour i. Soit $a^i \in A^i$, une action particulière de A^i. On appelle a^i un résultat du jeu.
3. Chaque joueur a une fonction de payoff, Π^i qui assigne un nombre réel $\Pi^i(a)$, à chaque action du joueur i.

Définition d'un équilibre du jeu

Équilibre de Nash

- Une situation du jeu où chaque stratégie est la meilleure réponse à l’autre est un **équilibre de Nash**.

- Dans notre exemple, il y a deux équilibres de Nash : (U,L) et (D,R).

Théorie des jeux

		Joueur B	
		L	R
Joueur A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

(U,L) et (D,R) sont deux “équilibres de Nash” pour ce jeu

Théorie des jeux

		joueur B	
		L	R
joueur A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

(U,L) et (D,R) sont des équilibres de Nash pour ce jeu. Mais, lequel va apparaître ? Nous remarquons que (U,L) est préféré à (D,R) par les deux joueurs. Pour autant est-ce que (U,L) va apparaître ?

Le dilemme du prisonnier

- Pour savoir si les situations préférés (eu égard au critère de Pareto) sortiront du jeu, traitons l'exemple très connu du dilemme du prisonnier…

Le dilemme du prisonnier

- Deux bandits se font arrêter par la police.
- Les policiers n’ont pas assez de preuves pour les inculper.
- Les policiers interrogent les bandits séparément.
- Les bandits peuvent :
  - soit garder le silence (S)
  - soit se confesser (C), i.e. ils avouent.

Théorie des jeux

		Clyde	
		S	C
Bonnie	S	(-5,-5)	(-30,-1)
	C	(-1,-30)	(-10,-10)

Quel est le résultat de ce jeu ?

Théorie des jeux

		Clyde	
		S	C
Bonnie	S	(-5,-5)	(-30,-1)
	C	(-1,-30)	(-10,-10)

Si Bonnie joue le Silence alors la meilleure réponse de Clyde est la Confession.

Théorie des jeux

		Clyde S	Clyde C
Bonnie	S	(-5,-5)	(-30,-1)
	C	(-1,-30)	(-10,-10)

Si Bonnie joue le Silence alors la meilleure réponse de Clyde est la Confession.

Si Bonnie joue la Confession alors la meilleure réponse de Clyde est la Confession

Théorie des jeux

		Clyde S	Clyde C
Bonnie	S	(-5,-5)	(-30,-1)
Bonnie	C	(-1,-30)	(-10,-10)

Donc, quelle que soit la strat. de Bonnie, Clyde doit toujours se Confesser.
Se Confesser est la stratégie dominante pour Clyde.

La stratégie dominante

- Déf.: on appelle une stratégie dominante une stratégie dont le payoff est supérieur à toute autre action et ce que quelle que soit la stratégie des autres joueurs.

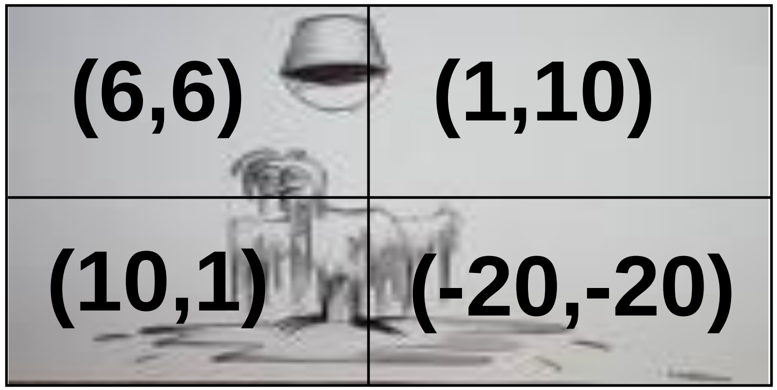
- Formellement:
- $\tilde{a}^i \in A^i$
- On enlève l'action a de i de A^i; on note les actions des autres a^{-i}
- Jouer $\tilde{a}^i$ maximise le profit de i ; donc :
- $\pi_i\left(\tilde{a}^i, a^{-i}\right) > \pi_i\left(a^i, a^{-i}\right), \, pour \, tout \; a^i \in A^i$

Théorie des jeux

			Clyde	
			S	C
Bonnie	S		(-5,-5)	(-30,-1)
	C		(-1,-30)	(-10,-10)

Donc, le seul équilibre de Nash pour ce jeu est (C,C), même si (S,S) donne à Bonnie et Clyde de meilleurs gains. L'équilibre de Nash est inefficace…

Le jeu de la poule mouillée



		B	
		Coopère	Trahit
A	Coopère	(6,6)	(1,10)
	Trahit	(10,1)	(-20,-20)

Quel est le résultat de ce jeu ?

Jeu séquentiel

(sous forme extensive)

Jeux séquentiels

- Dans nos deux exemples, les joueurs jouaient simultanément.
- Il existe des jeux où les joueurs jouent l’un après l’autre : **jeux séquentiels**.
- Le joueur qui joue en premier est le ***leader***, celui qui joue en deuxième est le ***follower***.

Exemple

- Parfois, un jeu a plusieurs équilibres de Nash et il est difficile de savoir lequel va sortir du jeu…

- En revanche, quand un jeu est séquentiel, il est possible de dire quel équilibre de Nash va sortir du jeu.

Théorie des jeux

		joueur B	
		L	R
joueur A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

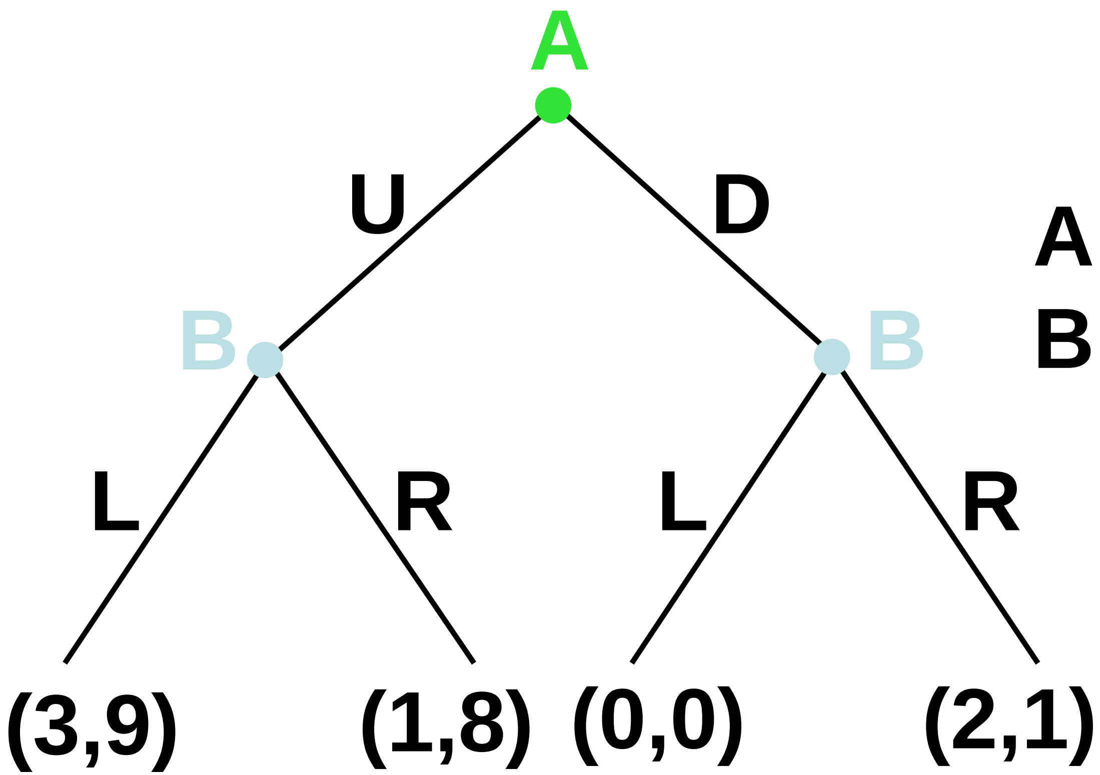
(U,L) et (D,R) sont deux équilibres de Nash quand le jeu est simultané. Et, il est impossible de savoir quel équilibre va arriver.

Théorie des jeux

		joueur B	
		L	R
joueur A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

Supposons maintenant que le jeu est séquentiel : A est le leader et B le follower. Nous pouvons réécrire ce jeu sous sa forme extensive…

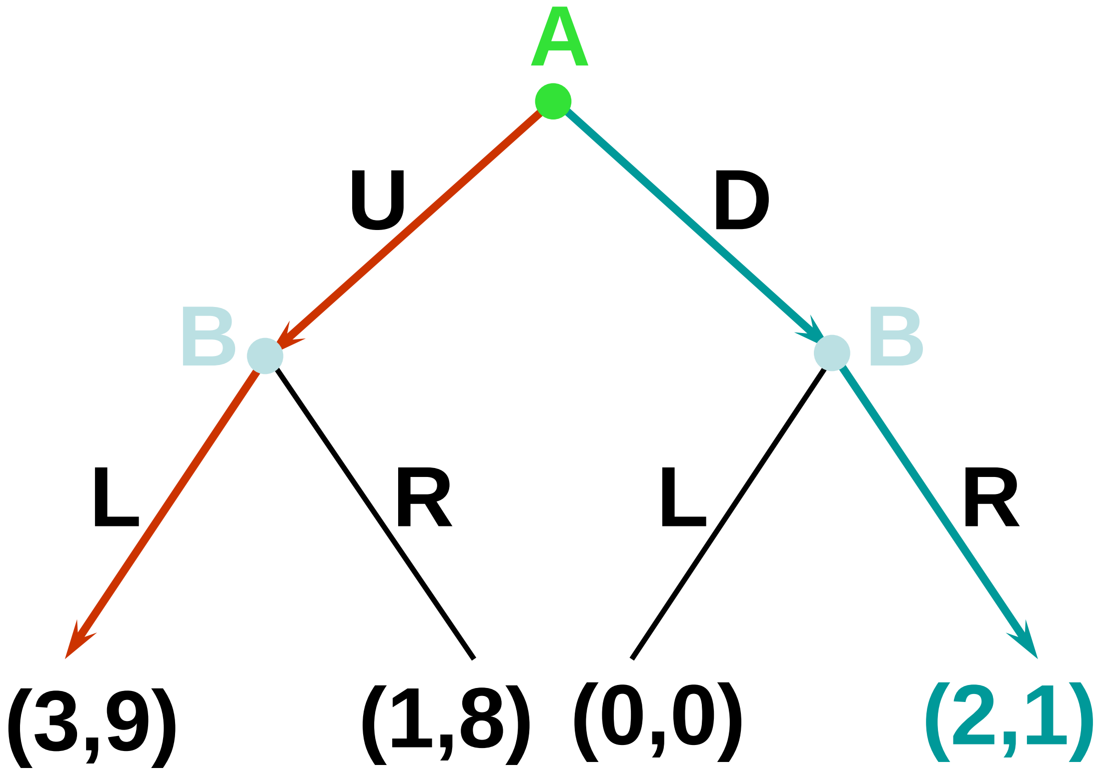
Théorie des jeux



A jour en premier

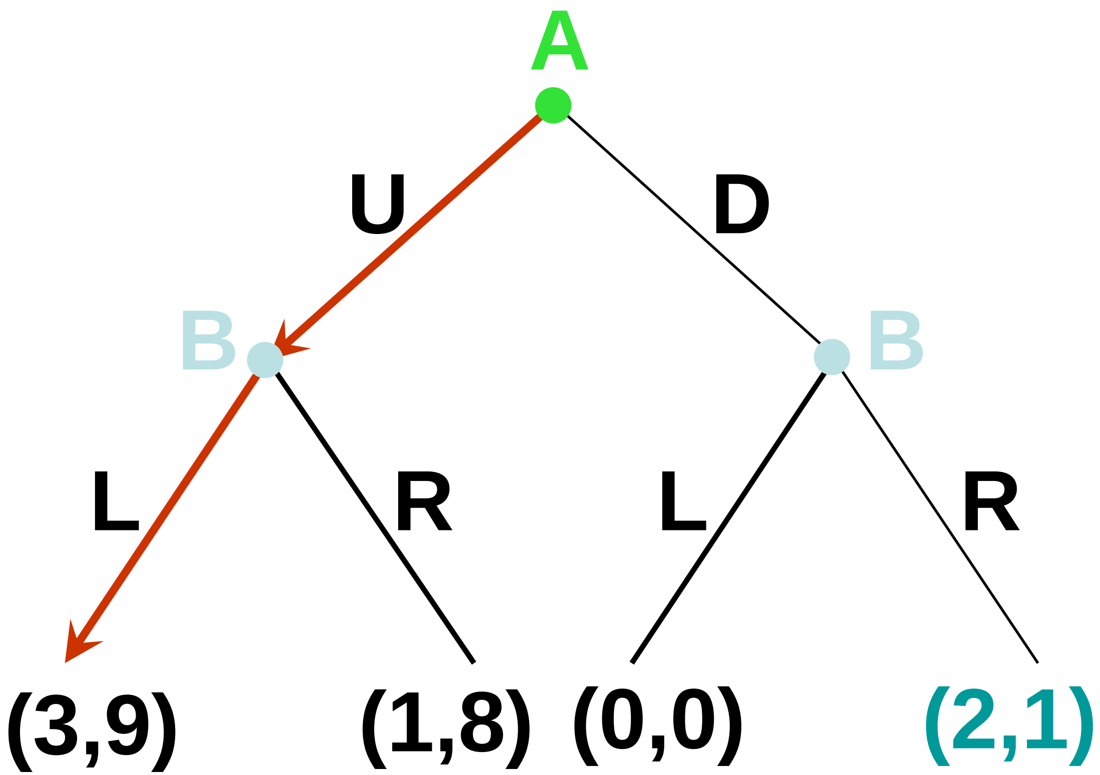
B jour en second

Théorie des jeux



(U,L) est un équilibre de Nash
(D,R) est un équilibre de Nash
Quel est celui qui va sortir du jeu?

Théorie des jeux



Si A joue U alors B joue L; A gagne 3.
Si A joue D alors B joue R; A gagne 2.
Donc (U,L) est l'équilibre de Nash qui sortira

Fonctions de meilleures réponses

Fonctions de meilleures réponses

- Soit un jeu 2×2; *i.e.*, un jeu avec deux joueurs A et B, qui ont chacun deux actions possibles

- A peut choisir entre deux actions : a^A_1 et a^A_2

- B peut choisir entre deux actions a^B_1 et a^B_2

- Il y a 4 paires d'actions possibles :

  (a^A_1, a^B_1), (a^A_1, a^B_2), (a^A_2, a^B_1), (a^A_2, a^B_2)

- Chaque paire d'actions donnera des gains différents aux joueurs

Fonctions de meilleures réponses

- Supposons que les gains des joueurs A et B quand ils choisissent respectivement les actions a^A_1 et a^B_1 sont :

  $U^A(a^A_1, a^B_1) = 6$ et $U^B(a^A_1, a^B_1) = 4$

- De manière similaire, supposons que :

  $U^A(a^A_1, a^B_2) = 3$ et $U^B(a^A_1, a^B_2) = 5$

  $U^A(a^A_2, a^B_1) = 4$ et $U^B(a^A_2, a^B_1) = 3$

  $U^A(a^A_2, a^B_2) = 5$ et $U^B(a^A_2, a^B_2) = 7$

Fonctions de meilleures réponses

- $U^A(a^A_1, a^B_1) = 6$ et $U^B(a^A_1, a^B_1) = 4$
  $U^A(a^A_1, a^B_2) = 3$ et $U^B(a^A_1, a^B_2) = 5$
  $U^A(a^A_2, a^B_1) = 4$ et $U^B(a^A_2, a^B_1) = 3$
  $U^A(a^A_2, a^B_2) = 5$ et $U^B(a^A_2, a^B_2) = 7$

Fonctions de meilleures réponses

- **$U^A(a^A_1, a^B_1) = 6$** et $U^B(a^A_1, a^B_1) = 4$
  $U^A(a^A_1, a^B_2) = 3$ et $U^B(a^A_1, a^B_2) = 5$
  $U^A(a^A_2, a^B_1) = 4$ et $U^B(a^A_2, a^B_1) = 3$
  $U^A(a^A_2, a^B_2) = 5$ et $U^B(a^A_2, a^B_2) = 7$

- Si B choisit l'action a^B_1, quelle est la meilleure réponse de A ?

Fonctions de meilleures réponses

- **$U^A(a^A_1, a^B_1) = 6$** et $U^B(a^A_1, a^B_1) = 4$

  $U^A(a^A_1, a^B_2) = 3$ et $U^B(a^A_1, a^B_2) = 5$

  $U^A(a^A_2, a^B_1) = 4$ et $U^B(a^A_2, a^B_1) = 3$

  $U^A(a^A_2, a^B_2) = 5$ et $U^B(a^A_2, a^B_2) = 7$

- Si B choisit l'action a^B_1, la meilleure réponse de A est a^A_1 (car $6 > 4$)

Fonctions de meilleures réponses

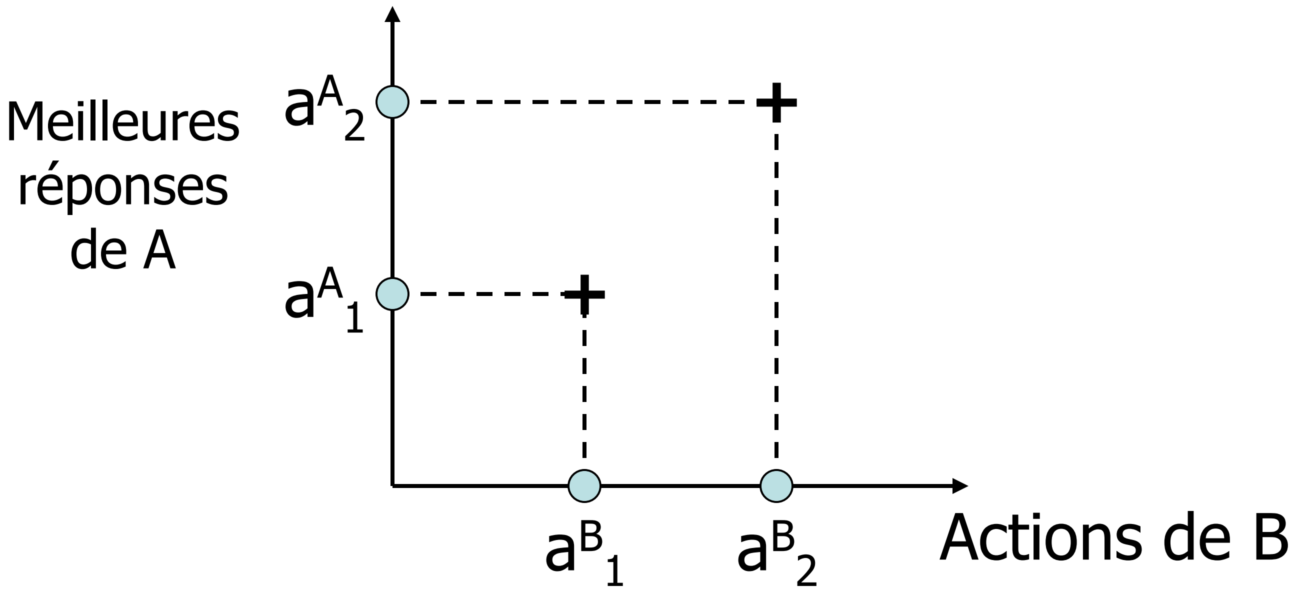
- $U^A(a^A_1, a^B_1) = 6$ et $U^B(a^A_1, a^B_1) = 4$
  $U^A(a^A_1, a^B_2) = 3$ et $U^B(a^A_1, a^B_2) = 5$
  $U^A(a^A_2, a^B_1) = 4$ et $U^B(a^A_2, a^B_1) = 3$
  $U^A(a^A_2, a^B_2) = 5$ et $U^B(a^A_2, a^B_2) = 7$
- Si B choisit l'action a^B_1, la meilleure réponse de A est a^A_1 (car 6 > 4)
- Si B choisit l'action a^B_2, quelle est la meilleure réponse de A ?

Fonctions de meilleures réponses

- $U^A(a^A_1, a^B_1) = 6$ et $U^B(a^A_1, a^B_1) = 4$
  $U^A(a^A_1, a^B_2) = 3$ et $U^B(a^A_1, a^B_2) = 5$
  $U^A(a^A_2, a^B_1) = 4$ et $U^B(a^A_2, a^B_1) = 3$
  $U^A(a^A_2, a^B_2) = 5$ et $U^B(a^A_2, a^B_2) = 7$
- Si B choisit l'action a^B_1, la meilleure réponse de A est a^A_1 (car 6 > 4)
- Si B choisit l'action a^B_2, la meilleure réponse de A est a^A_2 (car 5 > 3)

Fonctions de meilleures réponses

- Si B choisit a^B_1 alors A choisit a^A_1
- Si B choisit a^B_2 alors A choisit a^A_2
- La **“courbe” de meilleure réponse** de A est donc :



Fonctions de meilleures réponses

- $U^A(a^A_1, a^B_1) = 6$ et $U^B(a^A_1, a^B_1) = 4$
  $U^A(a^A_1, a^B_2) = 3$ et $U^B(a^A_1, a^B_2) = 5$
  $U^A(a^A_2, a^B_1) = 4$ et $U^B(a^A_2, a^B_1) = 3$
  $U^A(a^A_2, a^B_2) = 5$ et $U^B(a^A_2, a^B_2) = 7$

Fonctions de meilleures réponses

- $U^A(a^A_1, a^B_1) = 6$ et $\mathbf{U^B(a^A_1, a^B_1) = 4}$
  $U^A(a^A_1, a^B_2) = 3$ et $\mathbf{U^B(a^A_1, a^B_2) = 5}$
  $U^A(a^A_2, a^B_1) = 4$ et $U^B(a^A_2, a^B_1) = 3$
  $U^A(a^A_2, a^B_2) = 5$ et $U^B(a^A_2, a^B_2) = 7$
- Si A choisit l'action a^A_1, quelle est la meilleure réponse de B ?

Fonctions de meilleures réponses

- $U^A(a^A_1, a^B_1) = 6$ et **$U^B(a^A_1, a^B_1) = 4$**
  $U^A(a^A_1, a^B_2) = 3$ et **$U^B(a^A_1, a^B_2) = 5$**
  $U^A(a^A_2, a^B_1) = 4$ et $U^B(a^A_2, a^B_1) = 3$
  $U^A(a^A_2, a^B_2) = 5$ et $U^B(a^A_2, a^B_2) = 7$
- Si A choisit l'action a^A_1, la meilleure réponse de B est a^B_2 (car 5 > 4)

Fonctions de meilleures réponses

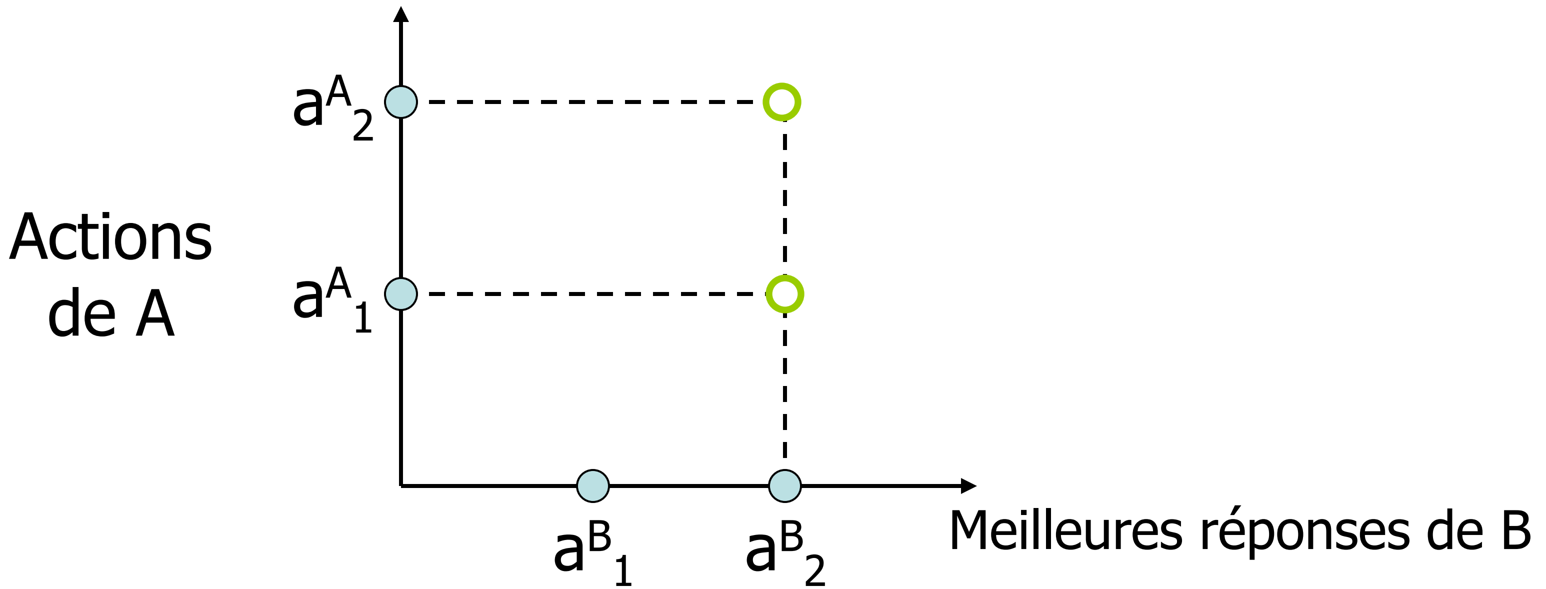
- $U^A(a^A_1, a^B_1) = 6$ et $U^B(a^A_1, a^B_1) = 4$
  $U^A(a^A_1, a^B_2) = 3$ et $U^B(a^A_1, a^B_2) = 5$
  $U^A(a^A_2, a^B_1) = 4$ et $\mathbf{U^B(a^A_2, a^B_1) = 3}$
  $U^A(a^A_2, a^B_2) = 5$ et $\mathbf{U^B(a^A_2, a^B_2) = 7}$
- Si A choisit l'action a^A_1, la meilleure réponse de B est a^B_2 (car $5 > 4$)
- Si A choisit l'action a^A_2, quelle est la meilleure réponse de B ?

Fonctions de meilleures réponses

- $U^A(a^A_1, a^B_1) = 6$ et $U^B(a^A_1, a^B_1) = 4$
  $U^A(a^A_1, a^B_2) = 3$ et $U^B(a^A_1, a^B_2) = 5$
  $U^A(a^A_2, a^B_1) = 4$ et $\mathbf{U^B(a^A_2, a^B_1) = 3}$
  $U^A(a^A_2, a^B_2) = 5$ et $\mathbf{U^B(a^A_2, a^B_2) = 7}$
- Si A choisit l'action a^A_1, la meilleure réponse de B est a^B_2 (car $5 > 4$)
- Si A choisit l'action a^A_2, la meilleure réponse de B est a^B_2 (car $7 > 3$)

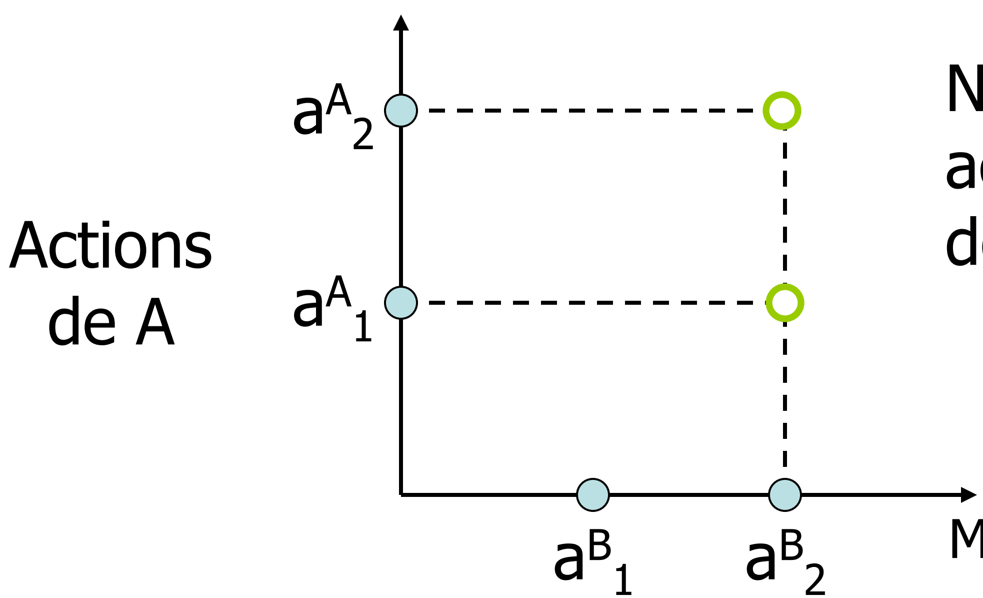
Fonctions de meilleures réponses

- Si A choisit a^A_1 alors B choisit a^B_2
- Si A choisit a^A_2 alors B choisit a^B_2
- La **courbe de meilleure réponse** de B est donc :



Fonctions de meilleures réponses

- Si A choisit a^A_1 alors B choisit a^B_2
- Si A choisit a^A_2 alors B choisit a^B_2
- La **courbe de meilleure réponse** de B est donc :

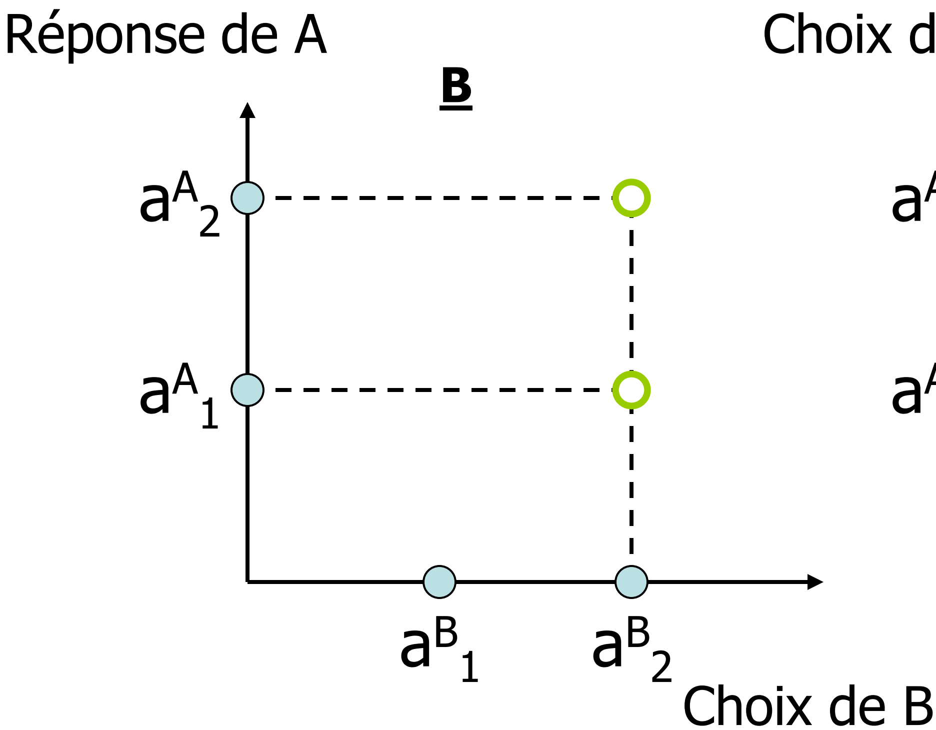


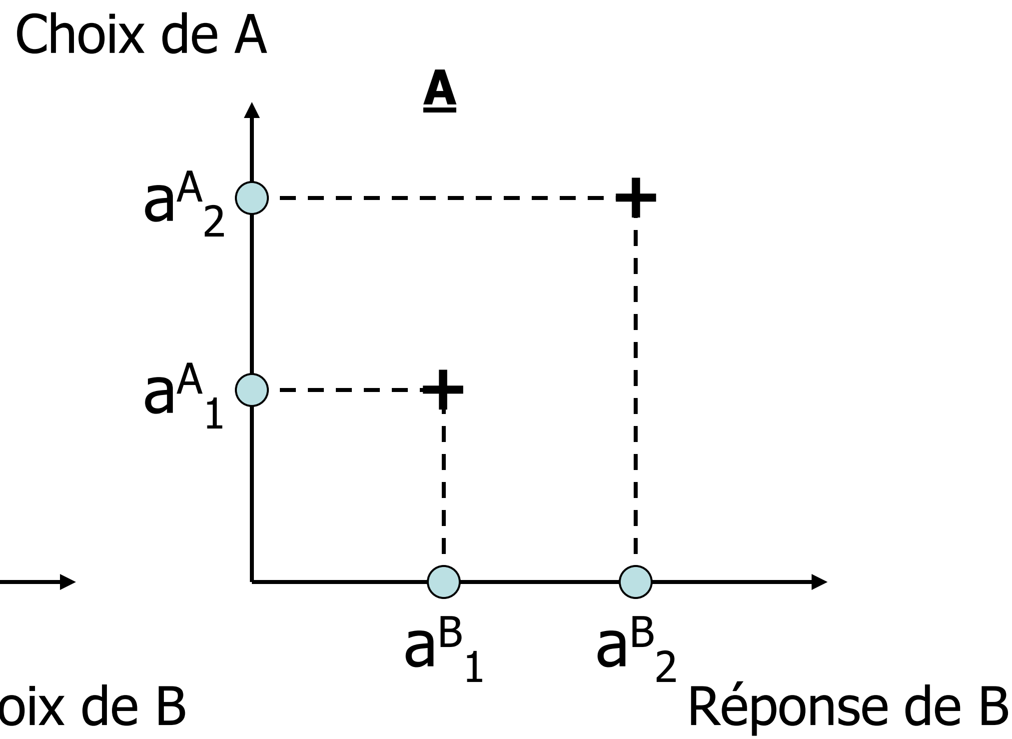
Meilleures réponses de B

Notons que a^B_2 est une action strictement dominante pour B

Meilleures réponses & Équilibre de Nash

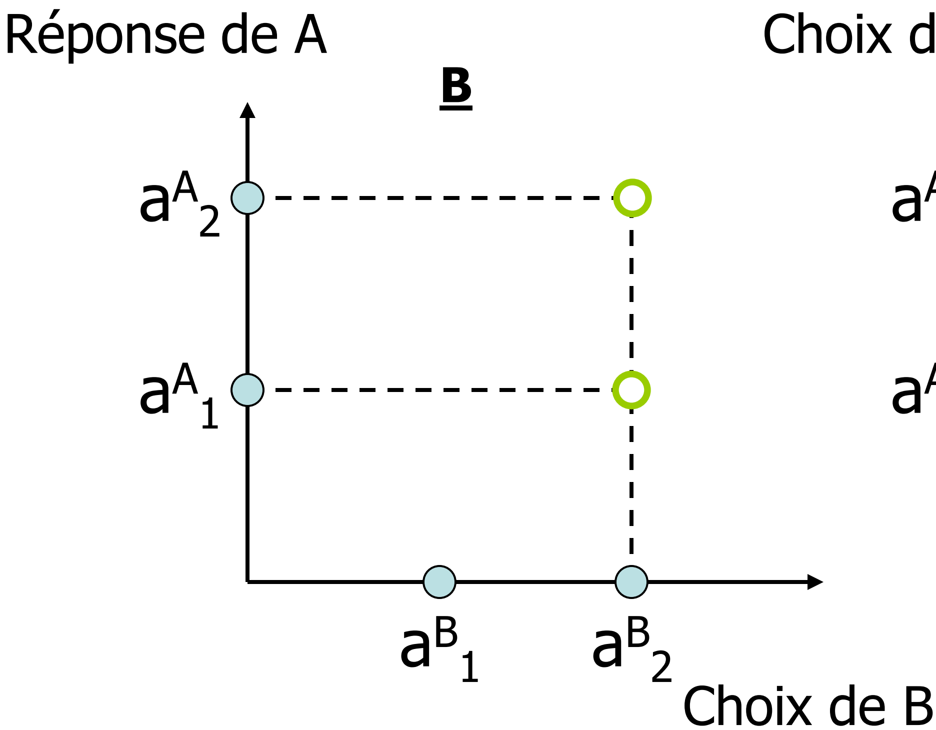
Comment peut-on utiliser les courbes de meilleures réponses pour localiser les équilibres de Nash du jeu ?

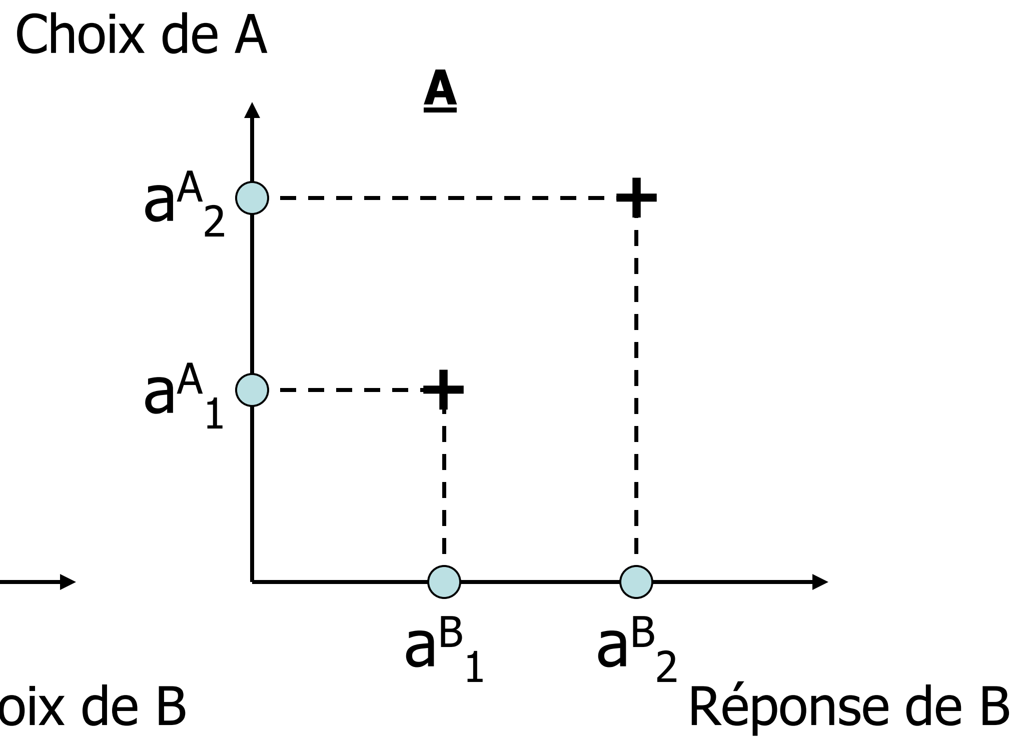




Meilleures réponses & Équilibre de Nash

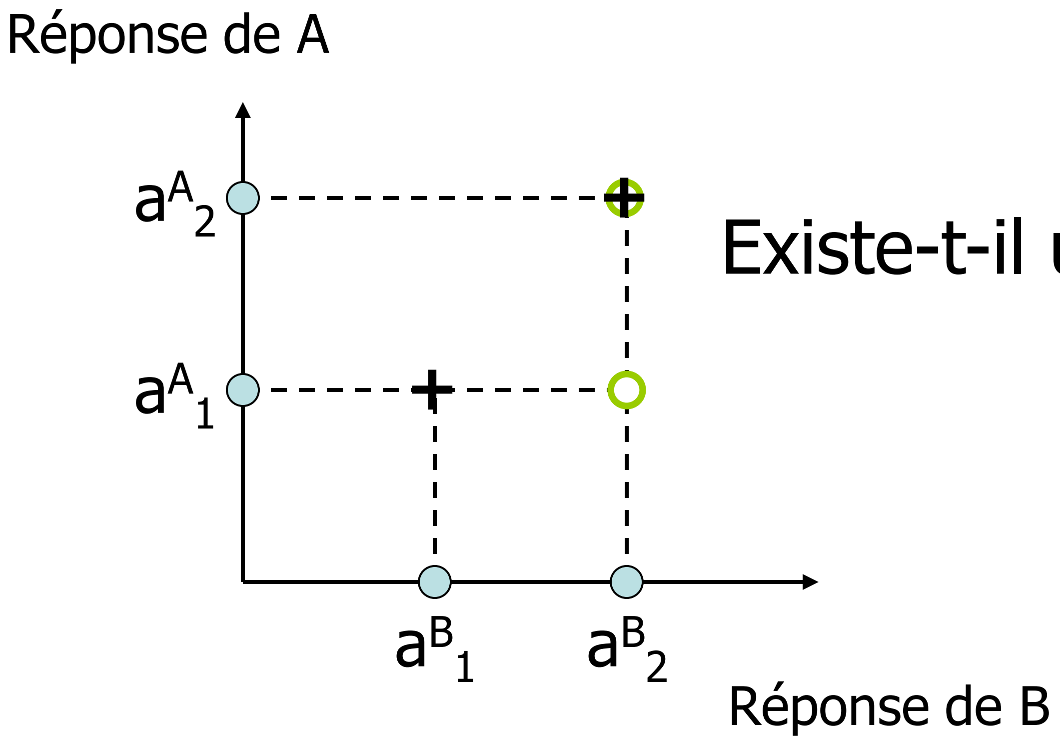
Comment peut-on utiliser les courbes de meilleures réponses pour localiser les équilibres de Nash du jeu ?
=> Superposez les courbes…





Meilleures réponses & Équilibre de Nash

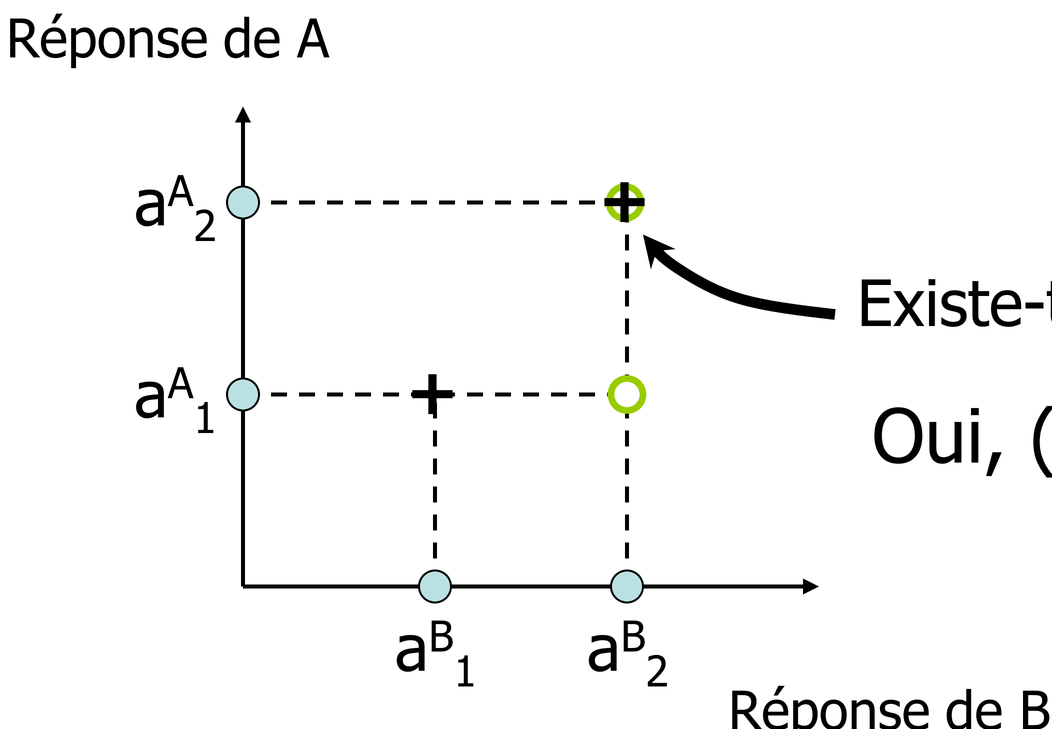
Comment peut-on utiliser les courbes de meilleures réponses pour localiser les équilibres de Nash du jeu ?
=> Superposez les courbes…



Existe-t-il un équilibre de Nash ?

Meilleures réponses & Équilibre de Nash

Comment peut-on utiliser les courbes de meilleures réponses pour localiser les équilibres de Nash du jeu ?
=> Superposez les courbes…

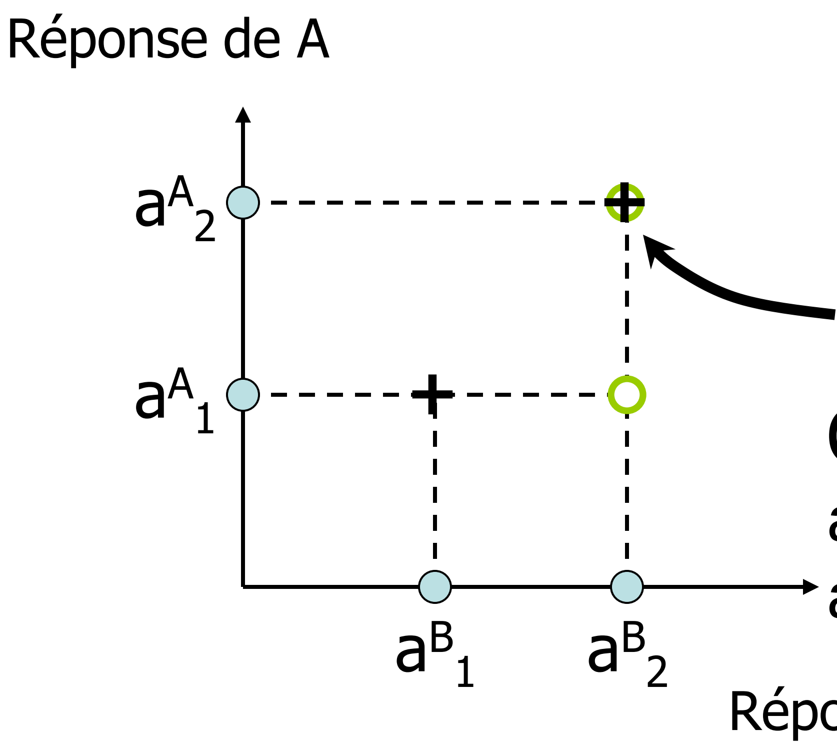


Existe-t-il un équilibre de Nash ?

Oui, (a^A_2, a^B_2). Pourquoi ?

Meilleures réponses & Équilibre de Nash

Comment peut-on utiliser les courbes de meilleures réponses pour localiser les équilibres de Nash du jeu ?
=> Superposez les courbes…



Existe-t-il un équilibre de Nash ?

Oui, (a^A_2, a^B_2). Pourquoi ?

a^A_2 est une meilleure réponse à a^B_2

a^B_2 est une meilleure réponse à a^A_2

Meilleures réponses & Équilibre de Nash

Voici la forme stratégique du jeu

Joueur B

Joueur A	a^B_1	a^B_2
a^A_1	**6,4**	**3,5**
a^A_2	**4,3**	**5,7**

a^A_2 est la seule meilleure réponse à a^B_2
a^B_2 est la seule meilleure réponse à a^A_2

Meilleures réponses & Équilibre de Nash

Joueur B

		a^B_1	a^B_2
Joueur A	a^A_1	**6,4**	**3,5**
	a^A_2	**4,3**	**5,7**

Existe-t-il un 2eme Equilibre de Nash ?

a^A_2 est la seule meilleure réponse à a^B_2
a^B_2 est la seule meilleure réponse à a^A_2

Meilleures réponses & Équilibre de Nash

Joueur B

		a^B_1	a^B_2
Joueur A	a^A_1	**6,4**	**3,5**
	a^A_2	**4,3**	**5,7**

Existe-t-il un 2eme équilibre de Nash ? Non, car a^B_2 est une action strictement dominante pour B

a^A_2 est la seule meilleure réponse à a^B_2
a^B_2 est la seule meilleure réponse à a^A_2

Une application
La fixation simultanée des quantités

Le modèle de Cournot

Concurrence en quantité

- Les firmes se concurrencent en choisissant leurs niveaux d'output simultanément.
- Le mathématicien français Cournot a étudié le premier ce type d'interaction (1838).
- Si la firme 1 produit y_1 unités et la firme 2 produit y_2 unités alors la quantité totale offerte sur le marché est $y_1 + y_2$.
- Le prix de marché sera alors $p(y_1+ y_2)$.
- Les fonctions de coût sont $c_1(y_1)$ et $c_2(y_2)$.

Concurrence en quantité

- Supposons que la firme 1 prenne le niveau d'output y_2 produit par la firme 2 comme donné.
- La fonction de profit de la firme 1 est alors :

$$\Pi_1(y_1;y_2) = p(y_1 + y_2)y_1 - c_1(y_1).$$

- Etant donné y_2, quel niveau d'output y_1 maximise le profit de la firme 1 ?

Un exemple

- Supposons que la fonction de demande inverse du marché est :

$$p(y_T) = 60 - y_T$$

et que les fonctions de coût des firmes sont :

$$c_1(y_1) = y_1^2 \quad \text{et} \quad c_2(y_2) = 15y_2 + y_2^2.$$

Un exemple

Etant donné y_2, la fonction de profit de 1 est

$$\Pi(y_1;y_2) = (60 - y_1 - y_2)y_1 - y_1^2.$$

Un exemple

Etant donné y_2, la fonction de profit de 1 est

$$\Pi(y_1; y_2) = (60 - y_1 - y_2)y_1 - y_1^2.$$

Etant donné y_2, le niveau d'output qui maximise le profit de la firme 1 est

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y_1} = 60 - 2y_1 - y_2 - 2y_1 = 0.$$

Un exemple

Etant donné y_2, la fonction de profit de 1 est

$$\Pi(y_1;y_2) = (60 - y_1 - y_2)y_1 - y_1^2.$$

Etant donné y_2, le niveau d'output qui maximise le profit de la firme 1 est

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y_1} = 60 - 2y_1 - y_2 - 2y_1 = 0.$$

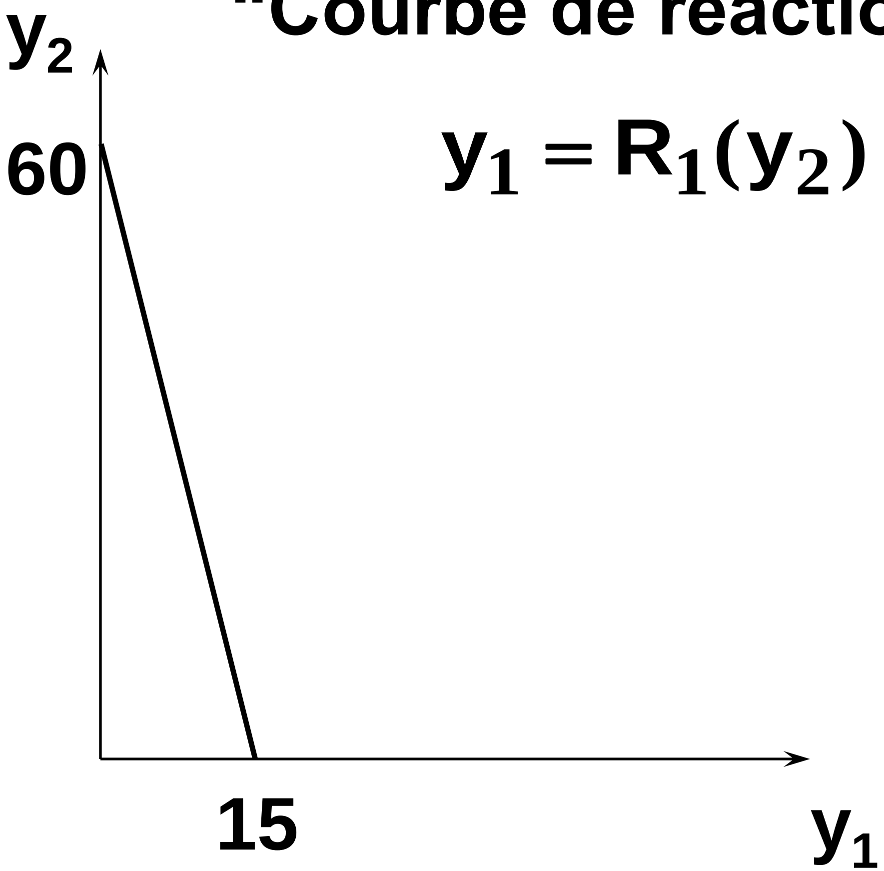
i.e. la meilleure réponse de 1 à y_2 est

$$y_1 = R_1(y_2) = 15 - \frac{1}{4}y_2.$$

Un exemple

"Courbe de réaction" de la firme 1

$$y_1 = R_1(y_2) = 15 - \frac{1}{4}y_2.$$



Un exemple

Idem, étant donné y_1, la f.d. profit de 2 est

$$\Pi(y_2;y_1) = (60 - y_1 - y_2)y_2 - 15y_2 - y_2^2.$$

Un exemple

Idem, étant donné y_1, la f.d. profit de 2 est

$$\Pi(y_2;y_1) = (60 - y_1 - y_2)y_2 - 15y_2 - y_2^2.$$

Etant donné y_1, le niveau d'output qui maximise le profit de la firme 2 est

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y_2} = 60 - y_1 - 2y_2 - 15 - 2y_2 = 0.$$

Un exemple

Idem, étant donné y_1, la f.d. profit de 2 est

$$\Pi(y_2;y_1) = (60 - y_1 - y_2)y_2 - 15y_2 - y_2^2.$$

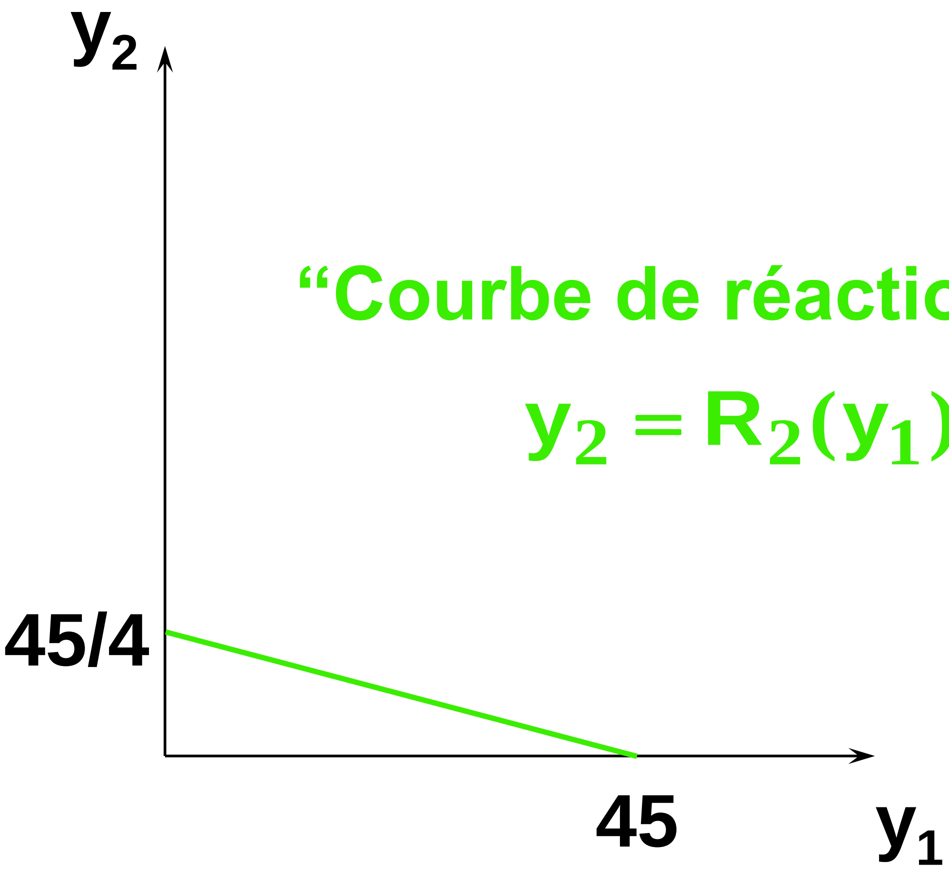
Etant donné y_1, le niveau d'output qui maximise le profit de la firme 2 est

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y_2} = 60 - y_1 - 2y_2 - 15 - 2y_2 = 0.$$

i.e. la meilleure réponse de 2 à y_1 est

$$y_2 = R_2(y_1) = \frac{45 - y_1}{4}.$$

Un exemple



"Courbe de réaction" de la firme 2

$$y_2 = R_2(y_1) = \frac{45 - y_1}{4}.$$

Un exemple

- Un équilibre émerge lorsque le niveau d'output produit par chaque firme est tel qu'aucune des firmes n'a intérêt à dévier.
- Une paire de niveaux d'output (y_1*,y_2*) est une équilibre dit de Cournot-Nash si

$$y_1^* = R_1(y_2^*) \quad \text{et} \qquad y_2^* = R_2(y_1^*).$$

Un exemple

$$y_1^* = R_1(y_2^*) = 15 - \frac{1}{4} y_2^* \text{ et } \quad y_2^* = R_2(y_1^*) = \frac{45 - y_1^*}{4}.$$

Un exemple

$$y_1^* = R_1(y_2^*) = 15 - \frac{1}{4}y_2^* \text{ et } y_2^* = R_2(y_1^*) = \frac{45 - y_1^*}{4}.$$

Nous substituons y_2^*

$$y_1^* = 15 - \frac{1}{4}\left(\frac{45 - y_1^*}{4}\right)$$

Un exemple

$$y_1^* = R_1(y_2^*) = 15 - \frac{1}{4} y_2^* \text{ et } y_2^* = R_2(y_1^*) = \frac{45 - y_1^*}{4}.$$

Nous substituons y_2*

$$y_1^* = 15 - \frac{1}{4}\left(\frac{45 - y_1^*}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad y_1^* = 13$$

Un exemple

$$y_1^* = R_1(y_2^*) = 15 - \frac{1}{4} y_2^* \text{ et } \quad y_2^* = R_2(y_1^*) = \frac{45 - y_1^*}{4}.$$

Nous substituons y_2*

$$y_1^* = 15 - \frac{1}{4}\left(\frac{45 - y_1^*}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad y_1^* = 13$$

D’où $$y_2^* = \frac{45 - 13}{4} = 8.$$

Un exemple

$$y_1^* = R_1(y_2^*) = 15 - \frac{1}{4} y_2^* \quad \text{et} \quad y_2^* = R_2(y_1^*) = \frac{45 - y_1^*}{4}.$$

Nous substituons y_2*

$$y_1^* = 15 - \frac{1}{4}\left(\frac{45 - y_1^*}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad y_1^* = 13$$

D'où

$$y_2^* = \frac{45 - 13}{4} = 8.$$

L'équilibre de Cournot-Nash est

$$(y_1^*, y_2^*) = (13,8).$$

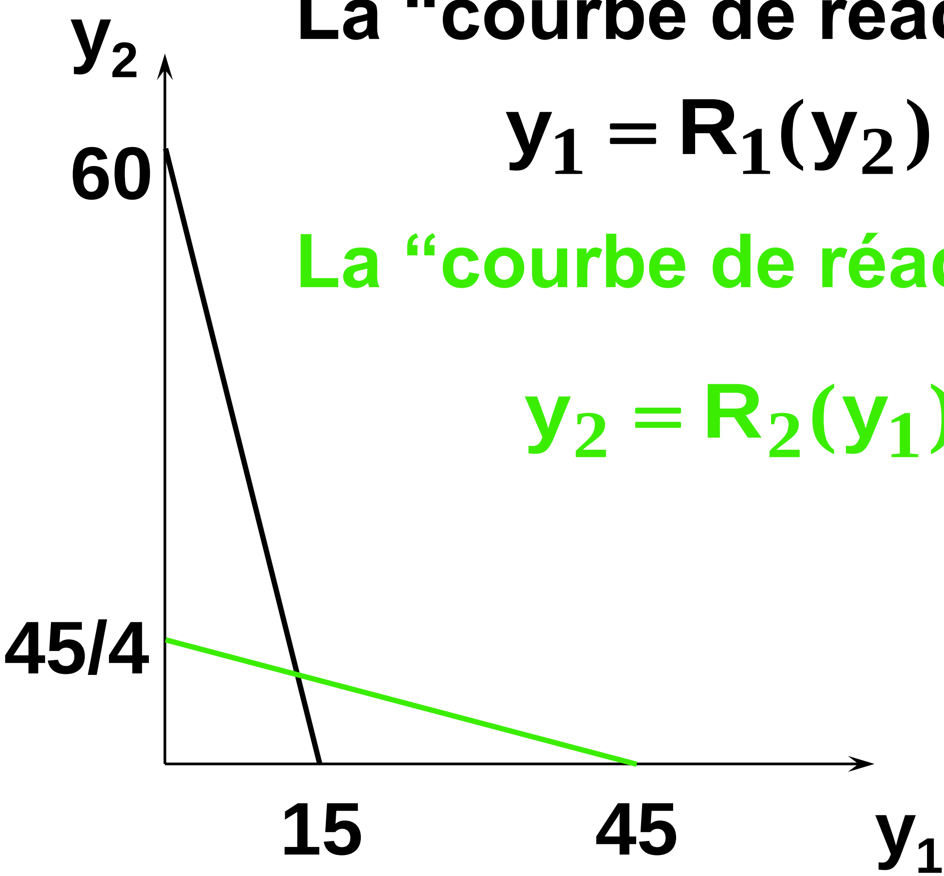
Un exemple

La “courbe de réaction” de la firme 1

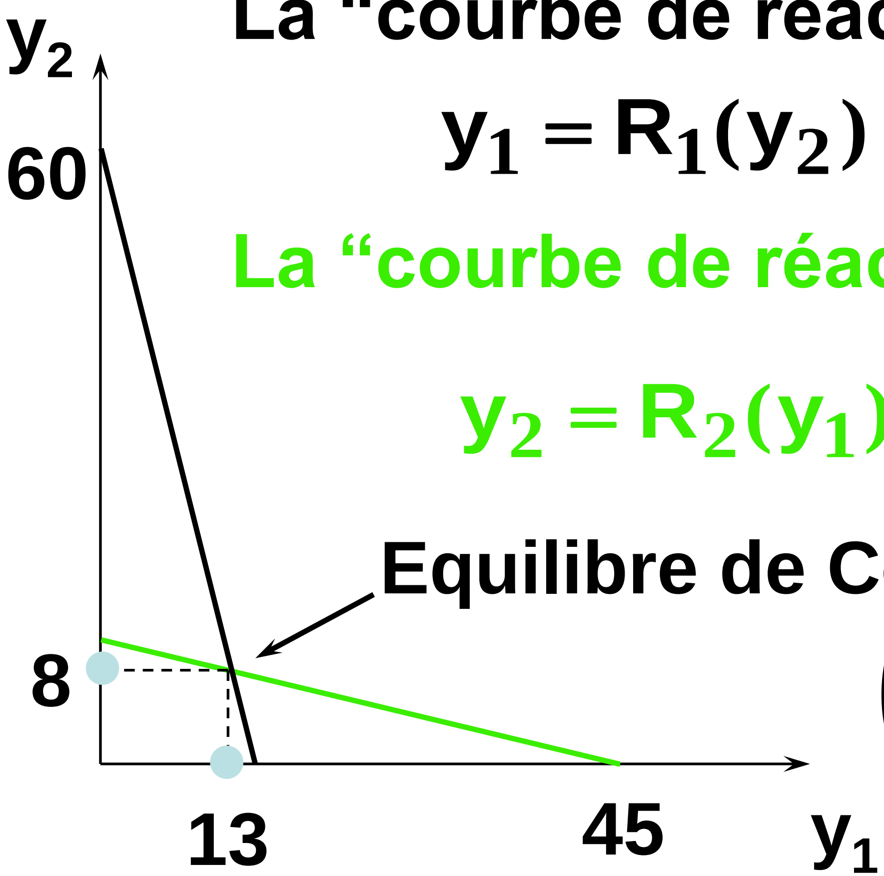
$$y_1 = R_1(y_2) = 15 - \frac{1}{4} y_2.$$

La “courbe de réaction” de la firme 2

$$y_2 = R_2(y_1) = \frac{45 - y_1}{4}.$$



Un exemple



La "courbe de réaction" de la firme 1

$$y_1 = R_1(y_2) = 15 - \frac{1}{4}y_2.$$

La "courbe de réaction" de la firme 2

$$y_2 = R_2(y_1) = \frac{45 - y_1}{4}.$$

Equilibre de Cournot-Nash

$$\left(y_1^*, y_2^*\right) = (13{,}8).$$

Concurrence en quantité

Globalement, étant donné le niveau d'output y_2 choisi par la firme 2, la f.d. profit de 1 est

$$\Pi_1(y_1;y_2) = p(y_1+y_2)y_1 - c_1(y_1)$$

et la valeur de y_1 qui max le profit est

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial y_1} = p(y_1+y_2) + y_1 \frac{\partial p(y_1+y_2)}{\partial y_1} - c_1{}'(y_1) = 0.$$

La solution, $y_1 = R_1(y_2)$, est la réaction de Cournot-Nash de la firme 1 à y_2.

Concurrence en quantité

De même, étant donné le niveau d'output y_1 de la firme 1, la fonction de profit de 2 est :

$$\Pi_2(y_2; y_1) = p(y_1 + y_2)y_2 - c_2(y_2)$$

Et la valeur de y_2 qui max le profit est

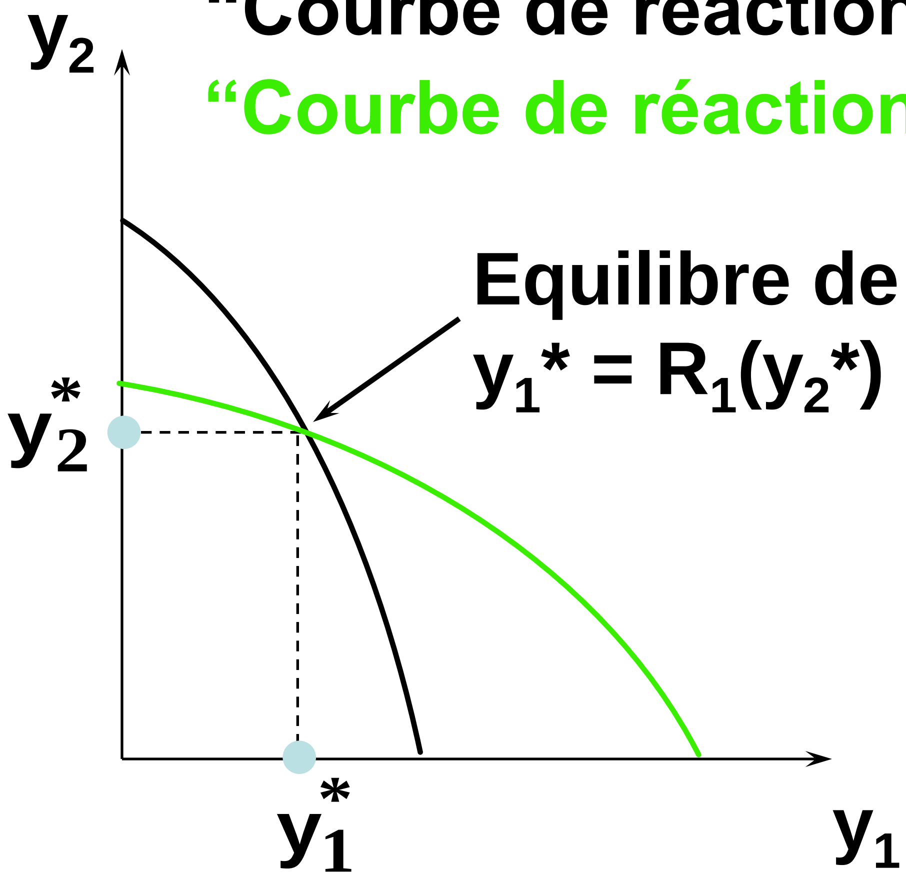
$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial y_2} = p(y_1 + y_2) + y_2 \frac{\partial p(y_1 + y_2)}{\partial y_2} - c_2{}'(y_2) = 0.$$

La solution, $y_2 = R_2(y_1)$, est la réaction de Cournot-Nash de la firme 2 à y_1.

Concurrence en quantité

"Courbe de réaction" de 1 $y_1 = R_1(y_2)$.

"Courbe de réaction" de 2 $y_2 = R_2(y_1)$.



Equilibre de Cournot-Nash

$y_1^* = R_1(y_2^*)$ et $y_2^* = R_2(y_1^*)$

Jeu en Stratégies Mixtes

Stratégies pures

		joueur B	
		L	R
joueur A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

Reprenons notre exemple initial. Nous avons vu que (U,L) and (D,R) sont deux équilibres de Nash.

Stratégies pures

joueur B

		L	R
joueur A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

Le joueur A a le choix entre U ou D, mais pas une combinaison des deux. On parle dans ce cas de stratégies pures…

Stratégies pures

joueur B

		L	R
joueur A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

De même, L and R sont les stratégies pures de B.

Stratégies pures

		joueur B	
		L	R
joueur A	U	(3,9)	(1,8)
	D	(0,0)	(2,1)

Par conséquent, (U,L) et (D,R) sont les équilibres de Nash en stratégies pures.

Stratégies pures

joueur B

		L	R
joueur A	U	(1,2)	(0,4)
	D	(0,5)	(3,2)

Considérons un nouveau jeu... Existe-t-il un équilibre de Nash en stratégie pure ?

Stratégies pures

joueur B

		L	R
joueur A	U	(1,2)	(0,4)
	D	(0,5)	(3,2)

(U,L) est-il un équilibre de Nash ? Non !

Stratégies pures

		joueur B	
		L	R
Joueur A	U	(1,2)	(0,4)
	D	(0,5)	(3,2)

(U,L) est-il un équilibre de Nash ? Non !

(U,R) est-il un équilibre de Nash ? Non !

Stratégies pures

		joueur B	
		L	R
joueur A	U	(1,2)	(0,4)
	D	(0,5)	(3,2)

(U,L) est-il un équilibre de Nash ? Non !

(U,R) est-il un équilibre de Nash ? Non !

(D,L) est-il un équilibre de Nash ? Non !

Stratégies pures

		joueur B	
		L	R
joueur A	U	(1,2)	(0,4)
	D	(0,5)	(3,2)

(U,L) est-il un équilibre de Nash ? Non !

(U,R) est-il un équilibre de Nash ? Non !

(D,L) est-il un équilibre de Nash ? Non !

(D,R) est-il un équilibre de Nash ? Non !

Stratégies pures

		joueur B	
		L	R
Joueur A	U	(1,2)	(0,4)
	D	(0,5)	(3,2)

Donc le jeu n'a pas d'équilibre de Nash.
En revanche, ce jeu peut avoir des équilibres de Nash en stratégies mixtes.

Stratégies mixtes

- Au lieu de choisir de manière exclusive entre Up ou Down, le joueur A peut attribuer à chaque stratégie des probabilités $(\pi_U, 1-\pi_U)$… c'est à dire que le joueur A jouera Up avec la prob. π_U et Down avec la prob. $1-\pi_U$.
- Le joueur A fait un mix de stratégies pures.
- La distribution de probabilité $(\pi_U, 1-\pi_U)$ est la stratégie mixte du joueur A.

Stratégies mixtes

- De même, le joueur B peut choisir une distribution de probabilité : $(\pi_L, 1-\pi_L)$… c'est à dire que le joueur B jouera Left avec la prob. π_L et Right avec la prob. $1-\pi_L$.

Stratégies mixtes

joueur B

joueur A		L, π_L	R, $1-\pi_L$
	U, π_U	(1,2)	(0,4)
	D, $1-\pi_U$	(0,5)	(3,2)

Stratégies mixtes

joueur B

		L, π_L	$R, 1-\pi_L$
joueur A	U, π_U	(1,2)	(0,4)
	$D, 1-\pi_U$	(0,5)	(3,2)

Si B joue Left son espérance de gain sera :

$$2\pi_U + 5(1-\pi_U)$$

Stratégies mixtes

		joueur B	
		L, π_L	R, $1-\pi_L$
joueur A	U, π_U	(1,2)	(0,4)
	D, $1-\pi_U$	(0,5)	(3,2)

Si B joue Left son espérance de gains sera :

$$2\pi_U + 5(1-\pi_U).$$

Si B joue Right son espérance de gains sera:

$$4\pi_U + 2(1-\pi_U).$$

Stratégies mixtes

joueur B

		L, π_L	$R, 1-\pi_L$
Joueur A	U, π_U	(1,2)	(0,4)
	$D, 1-\pi_U$	(0,5)	(3,2)

Si $2\pi_U + 5(1-\pi_U) > 4\pi_U + 2(1-\pi_U)$ **alors**

B jouera seulement Left.

Mais il n'y a pas d'équilibre de Nash dans lequel B joue toujours Left.

Stratégies mixtes

joueur B

		L, π_L	$R, 1-\pi_L$
joueur A	U, π_U	**(1,2)**	**(0,4)**
	$D, 1-\pi_U$	**(0,5)**	**(3,2)**

Si $2\pi_U + 5(1-\pi_U) < 4\pi_U + 2(1-\pi_U)$ **alors**

B jouera seulement Right. Mais, il n'existe pas d'équilibre de Nash où B jouera toujours Right.

Stratégies mixtes

Joueur B

		L, π_L	$R, 1-\pi_L$
Joueur A	$U, \frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	$D, \frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Donc, pour qu'il existe un équilibre de Nash, B doit être indifférent entre jouer Left ou Right; i.e. :

$$2\pi_U + 5(1-\pi_U) = 4\pi_U + 2(1-\pi_U)$$

$$\Rightarrow \quad \pi_U = 3/5.$$

Stratégies mixtes

joueur B

		L, π_L	$R, 1-\pi_L$
joueur A	$U, \frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	$D, \frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Si A joue Up son espérance de gains sera :

$$1 \times \pi_L + 0 \times (1 - \pi_L) = \pi_L.$$

Stratégies mixtes

		joueur B	
		L, π_L	R, $1-\pi_L$
joueur A	U, $\frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	D, $\frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Si A joue Up son espérance de gain sera :

$$1 \times \pi_L + 0 \times (1 - \pi_L) = \pi_L .$$

Si A joue Down, son espérance de gain sera :

$$0 \times \pi_L + 3 \times (1 - \pi_L) = 3(1 - \pi_L).$$

Stratégies mixtes

joueur B

		L, π_L	$R, 1-\pi_L$
Joueur A	$U, \frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	$D, \frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

si $\pi_L > 3(1-\pi_L)$ **Alors A jouera toujours Up.**

Mais il n'existe pas d'équilibre de Nash ou A Jouera toujours Up.

Stratégies mixtes

joueur B

		L, π_L	$R, 1-\pi_L$
joueur A	$U, \frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	$D, \frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

If $\pi_L < 3(1-\pi_L)$ Alors A jouera toujours Down. Mais il n'existe pas d'équilibre de Nash ou A jouera toujours Down.

Stratégies mixtes

joueur B

		L, π_L	$R, 1-\pi_L$
joueur A	$U, \frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	$D, \frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Donc, pour qu'il existe un équilibre de Nash A doit être indifférent entre jouer Up ou Down : $\pi_L = 3(1-\pi_L)$

Stratégies mixtes

joueur B

		L, π_L	$R, 1-\pi_L$
joueur A	$U, \frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	$D, \frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Donc, pour qu'il existe un équilibre de Nash, A doit être indifférent entre Up et Down :

i.e. $\pi_L = 3(1-\pi_L) \quad \Rightarrow \quad \pi_L = 3/4.$

Stratégies mixtes

Joueur B

joueur A		L, $\frac{3}{4}$	R, $\frac{1}{4}$
	U, $\frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	D, $\frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Donc, pour qu'il existe un équilibre de Nash, A doit être indifférent entre Up et Down :

i.e. $\pi_L = 3(1 - \pi_L) \quad \Rightarrow \quad \pi_L = 3/4.$

Stratégies mixtes

joueur B

joueur A		**L, $\frac{3}{4}$**	**R, $\frac{1}{4}$**
	U, $\frac{3}{5}$	**(1,2)**	**(0,4)**
	D, $\frac{2}{5}$	**(0,5)**	**(3,2)**

Donc, le seul équilibre de Nash du jeu existe si A a une stratégie mixte (3/5, 2/5) et B a une stratégie mixte (3/4, 1/4).

Stratégies mixtes

		joueur B	
		L, $\frac{3}{4}$	R, $\frac{1}{4}$
joueur A	U, $\frac{3}{5}$	(1,2) 9/20	(0,4)
	D, $\frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Les gains seront (1,2) avec la proba :

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$$

Stratégies mixtes

		joueur B	
		L, $\frac{3}{4}$	R, $\frac{1}{4}$
Joueur A	U, $\frac{3}{5}$	(1,2) 9/20	(0,4) 3/20
	D, $\frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Les gains seront (0,4) avec la proba :

$$\frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$$

Stratégies mixtes

joueur B

		L, $\frac{3}{4}$	R, $\frac{1}{4}$
joueur A	U, $\frac{3}{5}$	(1,2) 9/20	(0,4) 3/20
	D, $\frac{2}{5}$	(0,5) 6/20	(3,2)

Les gains seront (0,5) avec proba :

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$$

Stratégies mixtes

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2" align="center">joueur B</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td align="center">L, $\frac{3}{4}$</td><td align="center">R, $\frac{1}{4}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">joueur A</td><td>U, $\frac{3}{5}$</td><td align="center">(1,2)
9/20</td><td align="center">(0,4)
3/20</td></tr>
<tr><td>D, $\frac{2}{5}$</td><td align="center">(0,5)
6/20</td><td align="center">(3,2)
2/20</td></tr>
</table>

Les gains seront (3,2) avec la proba :

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$$

Stratégies mixtes

		joueur B	
		L, $\frac{3}{4}$	R, $\frac{1}{4}$
joueur A	U, $\frac{3}{5}$	(1,2) 9/20	(0,4) 3/20
	D, $\frac{2}{5}$	(0,5) 6/20	(3,2) 2/20

Les gains espérés de A pour l'équilibre de Nash sont :

$$1 \times \frac{9}{20} \quad + \quad 0 \times \frac{3}{20} \quad + \quad 0 \times \frac{6}{20} \quad + \quad 3 \times \frac{2}{20} \quad = \quad \frac{3}{4}.$$

Stratégies mixtes

		joueur B	
		L, $\frac{3}{4}$	R, $\frac{1}{4}$
joueur A	U, $\frac{3}{5}$	(1,2) 9/20	(0,4) 3/20
	D, $\frac{2}{5}$	(0,5) 6/20	(3,2) 2/20

Les gains espérés de B pour l'équilibre de Nash sont :

$$2 \times \frac{9}{20} \quad + \quad 4 \times \frac{3}{20} \quad + \quad 5 \times \frac{6}{20} \quad + \quad 2 \times \frac{2}{20} \quad = \quad \frac{16}{5}.$$

Combien existe-t-il d'équilibres de Nash ?

- Un jeu avec un nombre fini de joueurs ayant chacun un nombre fini de stratégies a au moins un équilibre de Nash (en stratégie pure ou mixte)

La rationalité en question

Le jeu de l'ultimatum

- **Deux individus doivent se partager un gain (x).**
- **Le 1^{er} fait une offre de partage au $2^{ème}$.**
- **Le 1^{er} (1-x) ; le $2^{ème}$ (x).**
- **Le $2^{ème}$ accepte ou refuse.**
- **Si le $2^{ème}$ refuse, personne ne gagne.**

Le jeu du concours de beauté

- **Chaque étudiant doit se munir d’un bout de papier et doit écrire un nombre entre [0 et 100].**
- **Le vainqueur du jeu: l’étudiant ayant écrit le nombre le plus proche de la moitié de la moyenne de tous les nombres choisis.**
- **Le vainqueur du jeu gagne une tablette de chocolat.**
- **En cas d’égalité, partage des gains.**
- **Le jeu est répété plusieurs fois.**

Le jeu du concours de beauté

- Un seul équilibre de Nash.
- Méthode de la dominance itérée.
- Les capacités cognitives sont limitées.
- Le résultat théorique est très peu observé…
- A part pour des étudiants doués en mathématiques…

Pour conclure

- http://www.youtube.com/watch?v=-KSryJXDpZo/

Capacité computationnelle

- http://www.youtube.com/watch?v=zJAH4ZJBiN8&feature=related.

- http://games.lumosity.com/chimp.html